

12	13	Σ

Nazwisko

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

0

Imię

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Indeks

--	--	--	--	--	--	--

ANALIZA 1A, KOŁOKWIUM nr 8, 9.12.2013, godz. 13.15-14.00

Wykład: J. Wróblewski

PODCZAS KOŁOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie **12.** (5 punktów za oba szeregi, 2 punkty za jeden szereg)

Rozstrzygnąć zbieżność szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{5n^7 + 4n^4 - 1}}{5n^5 - 4n^4 + 1} \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{5n^8 + 4n^4 - 1}}{5n^5 - 4n^4 + 1}.$$

Rozwiązanie:

Zastosujemy kryterium porównawcze, szacując pierwszy szereg od góry, a drugi od dołu.

Otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{5n^7 + 4n^4 - 1}}{5n^5 - 4n^4 + 1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{5n^7 + 4n^7 - 0}}{5n^5 - 4n^5 + 0} = 3 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < +\infty$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{5n^8 + 4n^4 - 1}}{5n^5 - 4n^4 + 1} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{5n^8 + 0 - n^8}}{5n^5 - 0 + n^5} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Odpowiedź: Pierwszy szereg jest zbieżny, a drugi rozbieżny.

Zadanie 13. (5 punktów)

Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\binom{2n}{n} > \left(\frac{7}{2}\right)^{n-1}.$$

Rozwiązanie:

Zamierzamy przeprowadzić dowód indukcyjny.

1° (w tej chwili wydaje nam się, że jest to pierwszy krok indukcyjny) Dla $n = 1$ mamy

$$\binom{2n}{n} = 2$$

oraz

$$\left(\frac{7}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{7}{2}\right)^0 = 1,$$

a zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $2 > 1$, jest więc prawdziwa.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$\binom{2n}{n} > \left(\frac{7}{2}\right)^{n-1}.$$

Chcemy wykazać, że

$$\binom{2n+2}{n+1} > \left(\frac{7}{2}\right)^n.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności otrzymujemy

$$\begin{aligned} \binom{2n+2}{n+1} &= \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} = \frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)}{n!(n+1)n!(n+1)} = \binom{2n}{n} \cdot \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = \\ &= \binom{2n}{n} \cdot \frac{2(2n+1)}{n+1} > \left(\frac{7}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{2(2n+1)}{n+1} \geq \left(\frac{7}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{7}{2} = \left(\frac{7}{2}\right)^n, \end{aligned}$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{2(2n+1)}{n+1} \geq \frac{7}{2}.$$

Powyższa nierówność jest równoważna kolejnym nierównościom:

$$4(2n+1) \geq 7(n+1),$$

$$8n+4 \geq 7n+7,$$

$$n \geq 3.$$

Drugi krok indukcyjny został więc przeprowadzony tylko dla $n \geq 3$.

Dla kompletności dowodu należy sprawdzić daną w treści zadania nierówność dla $n = 2$ oraz dla $n = 3$. Sprawdzenie dla $n = 3$ okazuje się przejmować rolę pierwszego kroku indukcyjnego, a sprawdzenie dla $n = 2$ weryfikuje dowodzoną nierówność w przypadku, który dotąd nie został sprawdzony, ani też nie wynika z dowodu indukcyjnego.

Dla $n = 2$ otrzymujemy

$$\binom{4}{2} = 6 > \frac{7}{2} = \left(\frac{7}{2}\right)^1.$$

1° (to okazuje się być pierwszym krokiem indukcyjnym) Dla $n = 3$ otrzymujemy

$$\binom{6}{3} = 20 = \frac{80}{4} > \frac{49}{4} = \left(\frac{7}{2}\right)^2.$$

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej $n \geq 3$, a ponadto wykonaliśmy bezpośrednie sprawdzenie dla $n = 1$ oraz dla $n = 2$.

Uwagi:

Sprawdzenie dla $n = 3$ nie wydaje się wymagać wiele pracy, jednak brak świadomości konieczności wykonania tego sprawdzenia jest bardzo poważnym błędem.

Jeśli zamiast nierówności

$$\frac{2(2n+1)}{(n+1)} \geq \frac{7}{2}$$

w rozwiązaniu pojawi się ostra nierówność

$$\frac{2(2n+1)}{(n+1)} > \frac{7}{2},$$



to w konsekwencji drugi krok indukcyjny zostanie przeprowadzony dla $n > 3$. Tym samym konieczne będzie także sprawdzenie dowodzonej nierówności dla $n = 4$.

Maksymalna możliwa ocena za rozwiązanie, w którym brak jest świadomości konieczności wykonania sprawdzenia dla $n = 3$, to 2 punkty. To samo, gdy brak jest świadomości konieczności wykonania sprawdzenia dla $n = 4$, jeżeli z rozwiązania nie wynika (np. z powodu użycia ostrej nierówności ♠), że została udowodniona implikacja $T(3) \Rightarrow T(4)$, gdzie $T(n)$ jest dowodzoną nierównością.