

Ćwiczenia 28.01.2014: zad. 692-714

Ćwiczenia 3-4.02.2014: powtórka przed egzaminem

**Uzupełnienie: liczby zespolone, zespolone szeregi liczbowe i potęgowe.**

692. Sprawdzić, że

$$\sqrt{a+bi} = \pm \left( \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i \operatorname{sgn}(b) \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \right),$$

jeśli  $b \neq 0$ .

Rozwiązać równania i układy równań.

693.  $\bar{z} = z^2$     694.  $\bar{z} = z^{-1}$     695.  $1+i = z^2$     696.  $3+4i = z^2$

697.  $-3+4i = z^2$     698.  $z^2+z = i$     699.  $z^2+iz = 1$     700.  $z = \bar{z}+1$

701.  $z^2\bar{z} = 8i$     702.  $z^4+10z^2+61 = 0$

703.  $\begin{cases} z_1^2 = z_2 \\ z_2^2 = z_1 \end{cases}$     704.  $\begin{cases} z_1^2+z_2^2 = 1 \\ z_1+z_2 = -1 \end{cases}$     705.  $\begin{cases} z_1+iz_2 = 1 \\ z_2+iz_1 = 2 \end{cases}$     706.  $\begin{cases} z_1+\bar{z}_2 = 1 \\ \bar{z}_1+z_2 = i \end{cases}$

707.  $z^5 = 1$     **Wskazówka:**  $z^4+z^3+z^2+z+1 = (z^2+az\pm 1)(z^2+bz\pm 1)$

Rozwiązać równania i nierówności. Zaznaczyć zbiór rozwiązań na płaszczyźnie zespolonej.

708.  $\operatorname{Re} z + \operatorname{Re} z^2 \geq 0$     709.  $3|z| \leq |z^2|+1$     710.  $|z| = |\bar{z}+1|$

711.  $|z+i| \leq |z-i|$     712.  $\operatorname{Im} \frac{z}{z^2+1} = 0$     713.  $\operatorname{Re} \frac{z+1}{z} = 0$

714. W trójkącie prostokątnym  $PQD$  kąt przy wierzchołku  $P$  jest prosty, a przy tym  $PQ = 1$  i  $PD = 4$ . Ponadto punkt  $C$  jest środkiem odcinka  $PD$ , punkt  $A$  jest środkiem odcinka  $PC$ , punkt  $B$  jest środkiem odcinka  $AC$ . Punkt  $E$  leży na prostej  $PD$ , przy czym

$$\sphericalangle PQA + \sphericalangle PQB + \sphericalangle PQC = \sphericalangle PQD + \sphericalangle PQE.$$

Obliczyć  $PE$ .**Wykład/konwersatorium:****Kryteria zbieżności szeregów o wyrazach zespolonych****Warunek konieczny zbieżności**Jeżeli  $z_n$  nie dąży do 0, to szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  jest rozbieżny.**Zbieżność bezwzględna**Jeżeli  $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < \infty$ , to szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  jest zbieżny.**Kryterium d'Alemberta**Jeżeli  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| < 1$ , to szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  jest zbieżny.Jeżeli  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| > 1$ , to szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  jest rozbieżny, a co więcej  $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = +\infty$ .

**Kryterium Cauchy'ego**

Jeżeli  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} < 1$ , to szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  jest zbieżny.

Jeżeli  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} > 1$ , to szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  jest rozbieżny, a co więcej  $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = +\infty$ .

**Uogólnienie kryterium o szeregach naprzemiennych**

Jeżeli ciąg  $(a_n)$  jest zbieżnym do zera nierosnącym ciągiem liczb rzeczywistych dodatnich, to dla dowolnej takiej liczby zespolonej  $z$ , że  $|z| = 1$  oraz  $z \neq 1$ , szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$  jest zbieżny.

Powyższe jest prawdą także dla  $|z| < 1$ , ale wówczas na ogół stosujemy inne kryteria.

**Inne kryteria**

Jeżeli szeregi  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  i  $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$  są zbieżne, to szeregi  $\sum_{n=1}^{\infty} (z_n \pm y_n)$  są zbieżne i wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} (z_n \pm y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} y_n.$$

Jeżeli szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  jest zbieżny, a szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$  jest rozbieżny, to szeregi  $\sum_{n=1}^{\infty} (z_n \pm y_n)$  są rozbieżne.

Dla dowolnej liczby zespolonej  $c \neq 0$  szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} cz_n$  jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ . Jeśli oba szeregi są zbieżne, to

$$\sum_{n=1}^{\infty} cz_n = c \sum_{n=1}^{\infty} z_n.$$

Zbieżność szeregu nie zależy od zmiany lub pominięcia skończenie wielu początkowych wyrazów.

Szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżne są jednocześnie szeregi  $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n$  oraz  $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_n$ . Jeśli podane szeregi są zbieżne, to

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n + i \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_n.$$

Obszar zbieżności szeregu potęgowego jest kołem o środku w zerze i promieniu  $R \in [0, +\infty]$ , zwanym promieniem zbieżności szeregu. Przy  $R = 0$  koło zbieżności degeneruje się do punktu 0, przy  $R = +\infty$  obszarem zbieżności jest cała płaszczyzna zespolona.

Na okręgu będącym brzegiem koła zbieżności szereg potęgowy może być zbieżny w części punktów, a w części rozbieżny.

Zbadać zbieżność szeregów:

$$715. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + in + 1} \quad 716. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + i} \quad 717. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + i} \quad 718. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+i}{n^2 + i}$$

Wyznaczyć obszary zbieżności zespolonych szeregów potęgowych:

$$719. \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n \quad 720. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8z^n}{n^2} \quad 721. \sum_{n=1}^{\infty} n z^n \quad 722. \sum_{n=0}^{\infty} n! z^{n^2} \quad 723. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{6n}}{n}$$

## EGZAMIN:

**Środa 5 lutego 2014 r.**

**godz. 8:50–12:50, s. HS, WS.**

## EGZAMIN POPRAWKOWY:

**Poniedziałek 17 lutego 2014 r.**

**godz. 8:50–12:50, s. HS.**

### Zadania do samodzielnego rozwiązania.

**724.** Czy nierówność  $|z+1| < |z-4|$  jest prawdziwa dla liczby zespolonej

- a)  $z = \log_2 3 + i \cdot \log_3 7$ ;
- b)  $z = \log_3 5 + i \cdot \log_4 9$ ;
- c)  $z = \log_4 8 + i \cdot \log_5 12$ ;
- d)  $z = \log_5 11 + i \cdot \log_6 14$ ?

**725.** Czy równość  $\bar{z}^2 = z^{-2}$  (uwaga na sprzężenie po lewej stronie) jest prawdziwa dla liczby zespolonej

- a)  $z = \sqrt{\log_6 2} + i \cdot \sqrt{\log_6 3}$ ;
- b)  $z = \sqrt{\log_{12} 3} + i \cdot \sqrt{\log_{12} 4}$ ;
- c)  $z = \sqrt{\log_{18} 4} + i \cdot \sqrt{\log_{18} 5}$ ;
- d)  $z = \sqrt{\log_{30} 5} + i \cdot \sqrt{\log_{30} 6}$ ?

**726.** Czy podana liczba zespolona  $z$  spełnia nierówność  $|z-1| \leq |z-3|$

- a)  $z = \log_2 3 + i \cdot \log_2 7$  .....      b)  $z = \log_2 7 + i \cdot \log_2 5$  .....
- c)  $z = \log_2 3 + i \cdot \log_2 11$  .....      d)  $z = \log_2 5 + i \cdot \log_2 13$  .....

**727.** Czy podana liczba zespolona  $z$  spełnia nierówność  $|z-i| \leq |z-5i|$

- a)  $z = \log_2 3 + i \cdot \log_2 7$  .....      b)  $z = \log_2 7 + i \cdot \log_2 5$  .....
- c)  $z = \log_2 3 + i \cdot \log_2 11$  .....      d)  $z = \log_2 5 + i \cdot \log_2 13$  .....

**728.** Czy podana liczba zespolona  $z$  spełnia równanie  $\bar{z} = z^{-1}$

a)  $z = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$  .....

b)  $z = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i$  .....

c)  $z = 2 + 3i$  .....

d)  $z = 3 + 4i$  .....

**729.** Czy podana liczba zespolona  $z$  spełnia równanie  $z^6 = 1$

a)  $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$  .....

b)  $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$  .....

c)  $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  .....

d)  $z = i$  .....

**730.** Czy podana liczba zespolona  $z$  spełnia równanie  $z^8 = 1$

a)  $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$  .....

b)  $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$  .....

c)  $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  .....

d)  $z = i$  .....

**731.** Czy nierówność  $|z - 1| < |z - 5|$  jest prawdziwa dla

a)  $z = 1 + i$  .....

b)  $z = 2 + 2i$  .....

c)  $z = 3 + 3i$  .....

d)  $z = 4 + 4i$  .....

**732.** Czy nierówność  $|z| < |z - 4i|$  jest prawdziwa dla

a)  $z = 1 + i$  .....

b)  $z = 2 + 2i$  .....

c)  $z = 3 + 3i$  .....

d)  $z = 4 + 4i$  .....

**733.** Czy nierówność  $|z - 5 - 5i| < |z + 1 + i|$  jest prawdziwa dla

a)  $z = 1 + i$  .....

b)  $z = 2 + 2i$  .....

c)  $z = 3 + 3i$  .....

d)  $z = 4 + 4i$  .....

**734.** Czy nierówność  $|z - 7| < |z - 7i|$  jest prawdziwa dla

a)  $z = 1 + i$  .....

b)  $z = 2 + 2i$  .....

c)  $z = 3 + 3i$  .....

d)  $z = 4 + 4i$  .....

**735.** Czy liczba  $(\sqrt{3} + i)^n$  jest rzeczywista dla

a)  $n = 2012$  .....

b)  $n = 2013$  .....

c)  $n = 2014$  .....

d)  $n = 2016$  .....

**736.** Czy liczba  $(1 - \sqrt{3} \cdot i)^n$  jest rzeczywista dla

a)  $n = 2012$  .....

b)  $n = 2013$  .....

c)  $n = 2014$  .....

d)  $n = 2016$  .....

**737.** Czy liczba  $(-1 + i)^n$  jest rzeczywista dla

a)  $n = 2012$  .....

b)  $n = 2013$  .....

c)  $n = 2014$  .....

d)  $n = 2016$  .....

Odpowiedzi do zadań **724–737** znajdują się na liście **10r**.