

Wykład (także 22.10.2013) oraz konwersatorium 21.10.2013: zad. 72-89

Ćwiczenia 22.10.2013: zad. 90-104

Kolokwium nr 3, 28.10.2013: materiał z zad. 1-111

Przykład 72. Dowieść, że liczba $\log_2 3$ jest niewymierna.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\log_2 3$ jest wymierna i niech m/n będzie jej przedstawieniem w postaci ilorazu liczb naturalnych (zauważmy, że jest to liczba dodatnia). Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\log_2 3 = \frac{m}{n}$$

$$2^{m/n} = 3$$

$$2^m = 3^n.$$

Ta ostatnia równość nie jest jednak możliwa, gdyż liczba 2^m jest parzysta, a liczba 3^n nieparzysta. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $\log_2 3$ nie jest liczbą wymierną.

73. Dla liczby wymiernej dodatniej $q = m/n$, gdzie $m, n \in \mathbb{N}$, zapisać warunek $\log_2 3 < q$. Wykorzystać ten warunek do porównania $\log_2 3$ z liczbami $3/2$, $5/3$ oraz $8/5$.

Nierówności.

74. Oszacować liczbę $1000!$ od góry i dołu przez potęgi dziesiątki.

75. Oszacować od góry i dołu wyrażenie

$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \sqrt{n+3} + \dots + \sqrt{9n}.$$

76. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq \dots$ zachodzi nierówność

$$n^2 \leq 2^n.$$

W miejsce kropek wstawić liczbę, dla której udaje się łatwo zrehabilitować dowód.

77. To samo dla nierówności

$$n^4 \leq 2^n.$$

78. To samo dla nierówności

$$n^8 \leq 2^n.$$

Zastanówić się nad modyfikacją dowodu tak, aby zmniejszyć liczbę wpisaną w miejsce kropek.

79. Wskazać liczbę naturalną $n > 1$ spełniającą nierówność

$$n^{1000} < 2^n.$$

Przykład 80. Wskazując odpowiednie liczby wymierne dodatnie C , D (niezależne od n) udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{4n^4 + 3n^3 - 2}{5n^4 - 4n^2 + 2} \leq D.$$

Rozwiązanie:

Szacując dane wyrażenie od góry otrzymujemy

$$\frac{4n^4 + 3n^3 - 2}{5n^4 - 4n^2 + 2} \leq \frac{4n^4 + 3n^4 - 0}{5n^4 - 4n^4 + 0} = \frac{7n^4}{n^4} = 7.$$

Z kolei szacowanie od dołu prowadzi do

$$\frac{4n^4 + 3n^3 - 2}{5n^4 - 4n^2 + 2} \geq \frac{4n^4 + 0 - 2n^4}{5n^4 - 0 + 2n^4} = \frac{2n^4}{7n^4} = \frac{2}{7}.$$

Zatem dane w zadaniu nierówności są spełnione ze stałymi $C = 2/7$ oraz $D = 7$.

Oszacować podane wyrażenia od góry i od dołu ($n \in \mathbb{N}$) przez wyrażenia różniące się stałym czynnikiem dodatnim

$$\begin{array}{lll} 81. \frac{n\sqrt{n+4}+5}{\sqrt{n^3+4}+1} & 82. \sqrt{n^2+n}-n & 83. \frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+3}+\dots+\sqrt{2n^2}}{2n+5} \\ 84. \frac{n^6+5n+4}{2n^3-n^2+7} & 85. \frac{\sqrt{n^7+9}+6}{\sqrt[3]{n^4+15}+8} & 86. \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\dots+\frac{1}{2n} \\ 87. \frac{7^n+6^n+2^n}{7^n+5^n+3^n} & 88. \sqrt[3]{n^3+n^2}-n & 89. \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}+\dots+\sqrt{64n}}{\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{n+2}+\sqrt[3]{n+3}+\dots+\sqrt[3]{64n}} \end{array}$$

90. Dowieść, że liczba $\log_{12}18$ jest niewymierna.

91. Dowieść, że liczba $\sqrt{\log_4 25}$ jest niewymierna.

92. Rozstrzygnąć, czy liczba $\log_2 3 + \log_4 5$ jest wymierna, czy niewymierna.

93. Wskazać taką liczbę naturalną n , że

$$n^{1000000} + 1 < 2^n.$$

94. Która z liczb jest większa $\prod_{i=2}^{2013} \prod_{j=1}^{i-1} \left(\sqrt[j]{j} - \sqrt[i]{i} \right)$ czy $10^{-1000000}$?

Wskazując odpowiednią liczbę naturalną k udowodnić nierówności $10^k < L < 10^{2k}$.

95. $L = 3972^{257}$ 96. $L = 257^{3972}$ 97. $L = 700!$

Wskazując odpowiednie liczby wymierne dodatnie C, D udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności $C < W(n) < D$.

$$98. W(n) = \frac{n^4 + 16n + 3}{2n^4 + 7n^2} \quad 99. W(n) = \frac{13n^2 - 10n + 3}{2n^2 + 7n - 1} \quad 100. W(n) = \frac{\sqrt{n+7}+3}{\sqrt{n+3}+7}$$

101. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{\sqrt{9n+16} - 3\sqrt{n}}{\sqrt{n+3} - \sqrt{n}} \leq 2C.$$

Wskazówka: $\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{x-y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$

Wskazując odpowiednie liczby wymierne dodatnie C , D oraz liczbę rzeczywistą k udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \cdot n^k < W(n) < D \cdot n^k.$$

$$102. W(n) = \frac{n^3 + 2n^2 + 1}{\sqrt{n^6 + 2} + 2} \quad 103. W(n) = \frac{2n^3 - n^2 + 1}{\sqrt[3]{n^2 + 1} + 1} \quad 104. W(n) = \frac{\sqrt[5]{n^2 + 1}}{\sqrt[7]{n^3 + 1} + 1}$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania.

105. Dowieść, że liczba $\log_{20} 50$ jest niewymierna.

106. Która z liczb jest większa

a) $2^{1000!}$ czy $999^{999!}$?

b) 26^{99} czy 10^{151} ?

c) 26^{99} czy 123^{65} ?

Przykład 107. Wskazując odpowiednie liczby wymierne dodatnie C , D (niezależne od n) udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{4n^4 - 3n^3 + 2}{5n^4 + 4n^2 - 2} \leq D.$$

Rozwiązanie:

Szacując dane wyrażenie od góry otrzymujemy

$$\frac{4n^4 - 3n^3 + 2}{5n^4 + 4n^2 - 2} \leq \frac{4n^4 - 0 + 2n^4}{5n^4 + 0 - 2n^4} = \frac{6n^4}{3n^4} = 2.$$

Z kolei szacowanie od dołu prowadzi do

$$\frac{4n^4 - 3n^3 + 2}{5n^4 + 4n^2 - 2} \geq \frac{4n^4 - 3n^4 + 0}{5n^4 + 4n^4 - 0} = \frac{n^4}{9n^4} = \frac{1}{9}.$$

Zatem dane w zadaniu nierówności są spełnione ze stałymi $C = 1/9$ oraz $D = 2$.

108. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{\sqrt{9n+40} - \sqrt{9n+16}}{\sqrt{4n+45} - \sqrt{4n+5}} \leq 5C.$$

Wskazując odpowiednie liczby wymierne dodatnie C , D oraz liczbę rzeczywistą k udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \cdot n^k < W(n) < D \cdot n^k.$$

$$109. W(n) = \frac{n^7 + 10n^3 + 3}{n^4 + 37} \quad 110. W(n) = \frac{5n^8 - n^4 + 3}{5n^{10} - 4} \quad 111. W(n) = \frac{n^6 + 2n^4 + 1}{\sqrt{n} + 2}$$