

Wykład: zad. 112-119

Konwersatorium 28.10.2013: zad. 146-148

Ćwiczenia 29.10.2013: zad. 120-145

Kolokwium nr 4, 4.11.2013: materiał z zad. 1-159

**Nierówności (c.d).**

Oszacować podane wyrażenia, gdzie  $n \in \mathbb{N}$ , od góry i od dołu przez wyrażenia różniące się stałym czynnikiem dodatnim

**112.**  $\frac{2^n + 10n^2}{2^n + n^4}$     **113.**  $\frac{4^n + n^4}{2^n + n^2}$     **114.**  $\frac{n!}{n! + 10^n}$     **115.**  $\frac{(n+2)!}{n! + 10^n}$

Oszacować podane wyrażenia od góry i od dołu przez wyrażenia postaci  $g \pm C/n$

116.  $\frac{n^5+n^4+1}{2n^5+n^3+5}$       117.  $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$       118.  $\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \frac{n}{n^2+3} + \dots + \frac{n}{n^2+n}$

119. Oszacować  $\sqrt[n]{n}$ .

**Uwaga:** Zgodnie z obowiązującą konwencją, w napisie typu  $a^{b^c}$  potęgowanie wykonuje się *od góry*, tzn.

$$a^{b^c} = a^{(b^c)}.$$

**120.** Niech  $a = \sqrt[4]{2}$ . Która z liczb jest większa

[illegible]

Pomoc dla osób dostających oczopląsu: liczba  $a$  występuje w pierwszym wyrażeniu 16 razy.

**121.** Niech  $a = \sqrt[16]{2}$ . Która z liczb jest większa

$a^{256}$  czy  $256^a$  ?

**122.** Uporządkować następujące liczby w kolejności rosnącej

$$a = (5 - \sqrt{37})^{2008}$$

$$b = (6 - \sqrt{37})^{2009}$$

$$c = (7 - \sqrt{73})^{2011}$$

$$d = (9 - \sqrt{73})^{2013}$$

**123.** Która z liczb jest większa  $2^{2^{2^{1001}}}$  czy  $1000^{2^{2^{1000}}}$  ?

W każdym z szesnastu poniższych zadań wpisz w miejscu kropek dwie liczby występujące w ciągu  $0, 1, 2, 5, 10, 100, 10^5, 10^{10}, 10^{20}, 10^{50}, 10^{100}, 10^{200}, 10^{500}, 10^{1000}, 10^{2000}, 10^{5000}, 10^{10000}, 10^{20000}, 10^{50000}, 10^{100000}, 10^{200000}, 10^{500000}, 10^{1000000}$  na **kolejnych** miejscach tak, aby powstały prawdziwe nierówności.

$$124. \quad \dots < 10000! < \dots$$

$$125. \quad \dots < 2^{10000} < \dots$$

$$126. \quad \dots < \binom{10000}{5} < \dots$$

$$127. \quad \dots < 30^{10000} < \dots$$

$$128. \quad \dots < 2^{2^{10}} < \dots$$

$$129. \quad \dots < 666! < \dots$$

$$130. \quad \dots < 4444^{4444} < \dots$$

$$131. \quad \dots < 7777^{7777} < \dots$$

$$132. \quad \dots < (7 + 2\sqrt{2})^{500} < \dots$$

$$133. \quad \dots < (6 + 3\sqrt{2})^{500} < \dots$$

$$134. \quad \dots < \binom{1000}{3} < \dots$$

$$135. \quad \dots < \binom{1000}{4} < \dots$$

$$136. \quad \dots < 3^{2000} < \dots$$

$$137. \quad \dots < 35000! < \dots$$

$$138. \quad \dots < 2011^{2011} < \dots$$

$$139. \quad \dots < \sum_{n=1}^{10^{30}} n < \dots$$

Wskazując odpowiednią liczbę wymierną dodatnią  $C$  udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej  $n$  zachodzą nierówności

$$1 - \frac{C}{n} < W(n) < 1 + \frac{C}{n}.$$

$$140. W(n) = \frac{n^2 + 2n + 3}{n^2 + 7n + 2} \quad 141. W(n) = \frac{3n^2 - 2n + 3}{3n^2 + 7n - 2} \quad 142. W(n) = \frac{\sqrt{4n^2 + 1}}{2n + 1}$$

Wskazując odpowiednie liczby wymierne dodatnie  $C, g$  udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej  $n$  zachodzą nierówności

$$g - \frac{C}{n} < W(n) < g + \frac{C}{n}.$$

$$143. W(n) = \frac{2n^2 + 2n + 3}{3n^2 + 7n + 2} \quad 144. W(n) = \frac{4n^2 - 2n + 3}{2n^2 + 7n - 2} \quad 145. W(n) = \frac{\sqrt{4n^2 + 1}}{3n + 1}$$

$$146. W(n) = \sqrt{n^2 + n} - n \quad 147. W(n) = \sqrt[3]{n^3 + n^2} - n$$

148. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej  $n \geq \dots\dots\dots$  zachodzi nierówność

$$n^{32} \leq 2^n.$$

W miejsce kropek wstaw dowolną liczbę, dla której umiesz przeprowadzić dowód.

Następnie zastanów się nad modyfikacją dowodu tak, aby zmniejszyć liczbę wpisaną w miejsce kropek.

### Zadania do samodzielnej powtórki.

149. Która z liczb jest większa:  $\sqrt[10]{10}$  czy 1,25 ?

W rozwiązaniu wolno korzystać z własności potęgowania oraz wolno wykonywać obliczenia na liczbach naturalnych mniejszych od 200.

150. Która z liczb jest większa:  $\sqrt[45]{45}$  czy 1,08 ?

W rozwiązaniu wolno korzystać z własności potęgowania, wolno wykonywać obliczenia na liczbach naturalnych mniejszych od 200 oraz wolno wykorzystać równości  $3^{19} = 1\,162\,261\,467$  i  $5^{13} = 1\,220\,703\,125$ .

151. Która z liczb jest większa:  $45^{13}$  czy  $2^{72}$  ?

W rozwiązaniu wolno korzystać z własności potęgowania oraz wolno wykonywać obliczenia na liczbach naturalnych mniejszych od 300.

152. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej  $n$  zachodzi równość

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \frac{1}{99} + \dots + \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{n}{2n + 1}.$$

**153.** Niech

$G(1) = 1$ ,  $G(2) = 6$ ,  $G(3) = 5$ , oraz  $G(n+3) = 3 \cdot G(n+1) + 2 \cdot G(n)$  dla  $n = 1, 2, 3, \dots$

Dowieść, że wówczas dla dowolnej liczby naturalnej  $n$  zachodzi równość

$$G(n) = 2^n + n \cdot (-1)^n.$$

**154.** Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej  $n$  zachodzi nierówność

$$8n \leq 2^n + 16.$$

**155.** Udowodnić nierówność

$$n^{2^{27}} \leq 2^n$$

dla wybranej przez siebie liczby naturalnej  $n > 1$ . (Należy wybrać jedną liczbę  $n$  spełniającą nierówność i dla tej liczby udowodnić nierówność.)

**Przypomnienie:** Potęgowanie wykonujemy **od góry**, tzn.  $a^{b^c} = a^{(b^c)}$ .

**156.** Dowieść, że nie istnieje liczba wymierna  $q$  spełniająca równość

$$q^q = 5.$$

**157.** Chcemy zlokalizować położenie względem liczb wymiernych, liczby rzeczywistej  $q > 1$  spełniającej równanie z poprzedniego zadania. Dla dowolnej liczby wymiernej postaci  $m/n$ , gdzie  $m$  jest liczbą całkowitą, a  $n$  liczbą naturalną, zapisać warunki  $m/n < q$  oraz  $m/n > q$  używając tylko liczb  $m$ ,  $n$ , działań na liczbach całkowitych, znaków nierówności i ewentualnie symboli logicznych.

Wykorzystać te warunki do porównania liczby  $q$  z liczbami  $5/2$  oraz  $25/12$  (bez użycia kalkulatora, korzystając z nierówności typu:  $25 < 27$ ,  $125 < 128$ ).

**158.** Która z liczb jest większa  $\left(\frac{9}{4}\right)^{9/4}$  czy 6 ?

W rozwiązaniu wolno korzystać z własności potęgowania, wolno wykonywać obliczenia na liczbach naturalnych mniejszych od 100 oraz wolno wykorzystać równości  $2^{11} = 2048$  i  $3^7 = 2187$ .

**159.** Uprościć wyrażenie

$$(3^{2^n} - 2^{2^m}) \cdot \prod_{i=0}^{37} (3^{2^{n+i}} + 2^{2^{m+i}}),$$

gdzie

$$\prod_{i=j}^k a_i = a_j \cdot a_{j+1} \cdot a_{j+2} \cdot \dots \cdot a_k.$$