

Wykład: zad. 235-243

Konwersatorium 18.11.2013: zad. 244-261

Ćwiczenia 19.11.2013: zad. 262-340

Kolokwium nr 6 — 25.11.2013 (poniedziałek, 13:15-14:00): materiał z zad. 1-384

Kresy zbiorów.

Definicja: Zbiór $Z \subset \mathbb{R}$ nazywamy ograniczonym z góry, jeżeli

$$\exists_{M \in \mathbb{R}} \forall_{x \in Z} x \leq M.$$

Każdą liczbę rzeczywistą $M \in \mathbb{R}$ spełniającą warunek

$$\forall_{x \in Z} x \leq M$$

nazywamy ograniczeniem górnym zbioru Z .

Definicja: Zbiór $Z \subset \mathbb{R}$ nazywamy ograniczonym z dołu, jeżeli

$$\exists_{M \in \mathbb{R}} \forall_{x \in Z} x \geq M.$$

Każdą liczbę rzeczywistą $M \in \mathbb{R}$ spełniającą warunek

$$\forall_{x \in Z} x \geq M$$

nazywamy ograniczeniem dolnym zbioru Z .

Definicja: Zbiór $Z \subset \mathbb{R}$ nazywamy ograniczonym, jeżeli jest jednocześnie ograniczony z dołu i z góry.

Definicja: Jeżeli niepusty zbiór $Z \subset \mathbb{R}$ jest ograniczony z góry, to kresem górnym zbioru Z nazywamy jego najmniejsze ograniczenie górne i stosujemy oznaczenie $\sup Z$. Istnienie takiego najmniejszego ograniczenia wynika z zasady ciągłości Dedekinda. Jeżeli zbiór Z jest nieograniczony z góry, przyjmujemy $\sup Z = +\infty$. Ponadto przyjmujemy $\sup \emptyset = -\infty$. Analogicznie określamy kres dolny zbioru, oznaczany przez $\inf Z$.

Wniosek: Jeżeli niepusty zbiór $Z \subset \mathbb{R}$ jest ograniczony z góry, to liczba G jest jego kresem górnym wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{x \in Z} x \leq G$$

oraz

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{x \in Z} x > G - \varepsilon.$$

Niech A i B będą niepustymi ograniczonymi zbiorami liczb rzeczywistych.

Niech $a_1 = \inf A$, $a_2 = \sup A$, $b_1 = \inf B$, $b_2 = \sup B$. Co można powiedzieć o następujących kresach:

235. $\inf\{-a : a \in A\}$ **236.** $\sup\{a^2 : a \in A\}$ **237.** $\inf\{a^2 : a \in A\}$

238. $\sup\{a - b : a \in A, b \in B\}$ **239.** $\sup\{ab : a \in A, b \in B\}$

240. $\inf\{ab : a \in A, b \in B\}$

241. Zbiory A i B są niepuste i ograniczone. Zbiór B jest skończony i wszystkie jego elementy są różne od 0. Czy zbiór $\{\frac{a}{b} : a \in A, b \in B\}$ musi być ograniczony? Odpowiedź uzasadnić.

242. A jest takim niepustym zbiorem ograniczonym liczb rzeczywistych, że $\inf A = -3$, $\sup A = 2$. Jakie wartości mogą przyjmować kresy zbioru $\{|a| : a \in A\}$? Odpowiedź uzasadnić przykładem lub dowodem.

243. Podać przykład takich zbiorów A, B , że $\inf A = 2$, $\sup A = 7$, $\inf B = 3$, $\sup B = 10$, $\inf(A \cap B) = 4$, $\sup(A \cap B) = 6$, $A \cap \mathbb{N} = B \cap \mathbb{N} = \emptyset$.

Przeczytaj poniższe warunki. Które z nich są równoważne temu, że $g = \sup A$?

244. $\left(\forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left(\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{a \in A} a < g + \varepsilon \right)$
245. $\left(\forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left(\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{a \in A} |a - g| < \varepsilon \right)$
246. $\left(\forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left(\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{a \in A} a > g - 2\varepsilon \right)$
247. $\left(\forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left(\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{a \in A} a > g - \frac{\varepsilon}{2} \right)$
248. $\left(\forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left(\forall_{n \in \mathbb{N}} \exists_{a \in A} a > g - \frac{1}{n} \right)$
249. $\left(\forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left(\forall_{n \in \mathbb{N}} \exists_{a \in A} n^2(g - a) < \frac{1}{n} \right)$
250. $\left(\forall_{a \in A} a < g \right) \wedge \left(\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{a \in A} (a - g)^2 < \varepsilon \right)$
251. $\left(\forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left(\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{a \in A} (a - g)^2 < \varepsilon \right)$
252. $\left(\forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left(\forall_{\varepsilon < g} \exists_{a \in A} a > \varepsilon \right)$
253. $\left(\forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left(\forall_{\varepsilon < g} \exists_{a \in A} a > g - \varepsilon \right)$
254. $\left(\forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left(\forall_{0 < \varepsilon < 1} \exists_{a \in A} a > g - \varepsilon \right)$
255. $\left(\forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left(\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{a \in A} a \geq g - \varepsilon \right)$
256. $\left(\forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left(\forall_{\varepsilon \geq 0} \exists_{a \in A} a \geq g - \varepsilon \right)$
257. $\left(\forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left(\forall_{\varepsilon \geq 0} \exists_{a \in A} a > g - \varepsilon \right)$
258. $\left(\forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left(\forall_{a \in A} \exists_{b \in A} b \geq \frac{g+a}{2} \right)$
259. $\left(\exists_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left(\forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left(\forall_{a \in A} \exists_{b \in A} b \geq \frac{g+a}{2} \right)$
260. $\left(\exists_{a \in A} a^2 \geq 0 \right) \wedge \left(\forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left(\forall_{a \in A} \exists_{b \in A} b \geq \frac{g+a}{2} \right)$
261. $\left(\exists_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left(\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{a \in A} a > g - \varepsilon \right)$

W każdym z pozostałych zadań podaj kresy zbioru oraz określ, czy kresy należą do zbioru.

$$262. A = \left\{ \frac{3}{n} - \frac{5}{m^2} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$263. B = \left\{ \frac{1}{n^2 - 7} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$264. C = \left\{ x^n : x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{5} \right) \wedge n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$265. D = \left\{ \sqrt{n^2 + 3} - n : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$266. E = \{ \log_2(2n - 1) - \log_2 n : n \in \mathbb{N} \}$$

$$267. F = \left\{ \frac{n}{3n + 7} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$268. G = \left\{ \frac{n}{3n - 7} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$269. H = \left\{ \frac{100^n}{n!} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$270. I = \left\{ \frac{100^n}{(2n)!} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$271. J = \left\{ \frac{mn^2}{m^2 + n^4} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$272. K = \{ |x + y| - |x| - |y| : x, y \in \mathbb{R} \}$$

$$273. L = \left\{ \frac{1}{5^n - 3^m} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$274. M = \left\{ \frac{(\log_2(n^2 + 1)) \cdot \log_3(n^2 + 4)}{(\log_8(n^2 + 4)) \cdot \log_9(n^2 + 1)} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$275. N = \left\{ \sqrt{x^2 + 2x + 1} : -5 \leq x < 3 \right\}$$

$$276. O = \left\{ \frac{1}{x^2 + 2} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$277. P = \left\{ \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$278. Q = \{ x^2 + 4x + 4 : x \in (-6, 1) \}$$

$$279. R = \{ x^2 + 4y + 4 : x, y \in (-6, 1) \}$$

$$280. S = \left\{ \frac{2n^2 + 3n + 5}{2n^2 + 3n + 4} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$281. T = \left\{ \frac{2n^2 + 3n + 5}{2n^2 + 3n + 6} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$282. U = \{x^2 : x \in (-3, 2)\}$$

$$283. V = \{x^3 : x \in (-3, 2)\}$$

$$284. W = \left\{ \frac{1}{5n-13} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$285. X = \left\{ \frac{\sqrt[n]{2}}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$286. Y = \{n^2 - 5n : n \in \mathbb{N}\}$$

$$287. Z = \left\{ \frac{13^n}{n!} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$288. A = \left\{ \left(-\frac{1}{2}\right)^n : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$289. B = \left\{ \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+2} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$290. C = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 2m^2 < 3n^2 \right\}$$

$$291. D = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 2^m > 3^n \right\}$$

$$292. E = \left\{ \frac{mn}{m^2 + 9n^2} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$293. F = \left\{ 7n + \frac{n! + n^{2009} + 1}{n! + n^{2009} + 4} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$294. G = \left\{ \frac{m+n}{p} : m, n, p \in \mathbb{N} \wedge m^2 > 2p^2 \wedge n^2 > 3p^2 \right\}$$

$$295. H = \{x^2 : x \in (-4, 9)\}$$

$$296. I = \left\{ \frac{n}{2n+3} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$297. J = \left\{ \frac{n!}{5^n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$298. K = \left\{ \binom{2008}{n} : n \in \mathbb{N} \wedge n \leq 2008 \right\}$$

$$299. L = \left\{ \frac{n}{n+m} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$300. M = \left\{ \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{3}\right)^2 : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$301. N = \{\sqrt{n^2 + 2n} - n : n \in \mathbb{N}\}$$

$$302. O = \{\sqrt[n]{3} - \sqrt[m]{2} : m, n \in \mathbb{N}\}$$

$$303. P = \left\{ \frac{7}{n} - 3m : m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$304. Q = \left\{ \frac{m^2 + 4n^2}{mn} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$305. R = \left\{ \frac{m^2 + 5n^2}{mn} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$306. S = \left\{ \frac{3m^2 + 7n^2}{mn} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$307. T = \left\{ \left(\sqrt{37} - 5 \right)^n : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$308. U = \left\{ \left(\sqrt{37} - 6 \right)^n : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$309. V = \left\{ \left(\sqrt{37} - 7 \right)^n : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$310. W = \left\{ \left(\sqrt{37} - 8 \right)^n : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$311. X = \left\{ \frac{mn}{m^2 + n^2 + 1} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$312. Y = \left\{ \frac{5m - 2n}{mn} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$313. Z = \left\{ \frac{m}{n+7} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$314. A = \{x^2 : x \in (-2, 1)\}$$

$$315. B = \{x^3 : x \in (-2, 1)\}$$

$$316. C = \{3x^2 + y^3 : x, y \in (-2, 1)\}$$

$$317. D = \{\sqrt{n^2 + n} - n : n \in \mathbb{N}\}$$

$$318. E = \{\sqrt{n^2 + n + 1} - n : n \in \mathbb{N}\}$$

$$319. F = \{|2 - \log_2 x| : x \in (1, 8]\}$$

$$320. G = \{|2 - \log_2 x| : x \in (1, 16]\}$$

$$321. H = \{|2 - \log_2 x| : x \in (1, 32]\}$$

$$322. I = \left\{ \frac{1}{3n-2} + \frac{1}{2m-3} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$323. J = \{\log_2(n+7) - \log_2 n : n \in \mathbb{N}\}$$

$$324. K = \left\{ \frac{(n!)^2}{2^{5n}} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$325. L = \left\{ \frac{m+n}{\sqrt{mn}} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$326. M = \left\{ \frac{(-1)^n}{n^2+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$327. N = \left\{ \frac{1}{n^2-22} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$328. O = \left\{ \frac{2n+1}{3n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$329. P = \left\{ \frac{2n+1}{3n+2} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$330. Q = \{x-2y : x, y \in \mathbb{R} \wedge 16 < x \leq 28 \wedge 3 < y \leq 4\}$$

$$331. R = \{|x-y| : x, y \in \mathbb{R} \wedge 16 < x \leq 28 \wedge 3 < y \leq 4\}$$

$$332. S = \left\{ \frac{1}{7n-30} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$333. T = \left\{ \frac{1}{(7n-30)^2} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$334. U = \left\{ \frac{1}{(7n-30)^3} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$335. V = \left\{ \frac{1}{7m-30} + \frac{1}{(7n-30)^2} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

W kolejnych pięciu zadaniach niech $f_n(x) = \begin{cases} x^2-3 & \text{dla } x < 2 \\ x-n & \text{dla } x \geq 2 \end{cases}$

$$336. A = \{f_2(x) : x \in (-1, 4]\}$$

$$337. B = \{f_3(x) : x \in (-1, 4]\}$$

$$338. C = \{f_4(x) : x \in (-1, 4]\}$$

$$339. D = \{f_5(x) : x \in (-1, 4]\}$$

$$340. E = \{f_6(x) : x \in (-1, 4]\}$$

$$341. A = \left\{ \frac{1}{n+4} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$342. B = \left\{ \frac{1}{n+4} - \frac{1}{m+5} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$343. C = \left\{ \frac{9^n}{n!} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$344. D = \left\{ \frac{(-9)^n}{n!} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$345. E = \left\{ \frac{1}{5n-2011} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$346. F = \{x^2 : x \in (-2, 1)\}$$

347. $G = \{x^3 : x \in (-2, 1)\}$
348. $H = \{x^2 + y^3 : x, y \in (-2, 1)\}$
349. $I = \left\{\frac{1}{x^2 + 9} : x \in (-2, 1)\right\}$
350. $J = \left\{\frac{1}{x^3 + 9} : x \in (-2, 1)\right\}$
351. $K = \left\{\frac{1}{x^4 + 9} : x \in (-2, 1)\right\}$
352. $L = \left\{\frac{1}{10n - 43} : n \in \mathbb{N}\right\}$
353. $M = \left\{\frac{1}{(10n - 43)^2} : n \in \mathbb{N}\right\}$
354. $N = \left\{\frac{1}{(10n - 43)^2 + 7} : n \in \mathbb{N}\right\}$
355. $O = \left\{\frac{(-1)^n}{n^2} : n \in \mathbb{N}\right\}$
356. $P = \left\{(-1)^n + \frac{(-1)^n}{n^2} : n \in \mathbb{N}\right\}$
357. $Q = \left\{(-1)^n - \frac{(-1)^n}{n^2} : n \in \mathbb{N}\right\}$
358. $R = \left\{(-1)^m - \frac{(-1)^n}{n^2} : m, n \in \mathbb{N}\right\}$
359. $S = \left\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge m^2 \leq 8n^2\right\}$
360. $T = \left\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge m^2 \leq 9n^2\right\}$
361. $U = \{\sqrt{x^2 - 4x + 4} : x \in (-3, 5)\}$
362. $V = \{\sqrt{x^2 - 4x + 4} : x \in (1, 4)\}$
363. $W = \left\{\frac{1}{n^2 - 6n + 10} : n \in \mathbb{N}\right\}$
364. $X = \left\{\frac{1}{n^2 - 6n + 7} : n \in \mathbb{N}\right\}$
365. $Y = \left\{\frac{1}{n^2 - 6n + 4} : n \in \mathbb{N}\right\}$
366. $Z = \left\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 4^n \leq 8^m \leq 12^n\right\}$

$$367. A = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 4^m \leq 8^n \leq 12^m \right\}$$

$$368. B = \left\{ \frac{m}{n} : 3n^2 \leq m^2 \leq 4n^2 \right\}$$

$$369. C = \left\{ \frac{m}{n} : 4m^2 \leq n^2 \leq 5m^2 \right\}$$

$$370. D = \left\{ \frac{m}{n} : 3^n \leq 2^m \leq 4^n \right\}$$

$$371. E = \left\{ \frac{m}{n} : 4^m \leq 2^n \leq 5^m \right\}$$

$$372. F = \left\{ \frac{m}{n} : 4^n \leq \left(\frac{m}{n} \right)^m \leq 27^n \right\}$$

$$373. G = \left\{ \frac{m}{n} : 25n^2 \leq m^2 \leq 27n^2 \right\}$$

$$374. H = \left\{ \frac{m}{n} : 25n^3 \leq m^3 \leq 27n^3 \right\}$$

$$375. I = \left\{ \frac{m}{n} : 3^n \leq 8^m \leq 4^n \right\}$$

$$376. J = \left\{ \frac{m}{n} : 3^n \leq 9^m \leq 4^n \right\}$$

$$377. K = \left\{ \frac{1}{10n-37} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$378. L = \{ \log_2(x+3) : x \in (-1, 5) \}$$

$$379. M = \{ \log_3(x^2+2) : x \in (-1, 5) \}$$

$$380. N = \{ 2^{\log_n 3} - 3^{\log_n 2} : n \in \mathbb{N}_2 \}, \quad \mathbb{N}_2 = \{2, 3, 4, 5, \dots\}$$

$$381. O = \left\{ \frac{2^{\log_n 3}}{3^{\log_n 2}} : n \in \mathbb{N}_2 \right\}$$

$$382. P = \left\{ 2^{2^{x^2}} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$383. Q = \left\{ 2^{2^{-x^2}} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$384. R = \left\{ 2^{2^{x^3}} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

Odpowiedzi do zadań **341–384** (do samodzielnego rozwiązania) znajdują się na liście **6r**.