

477. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^3 = \frac{7}{2}.$$

Rozwiązanie:

Spróbujemy znaleźć szereg geometryczny o żądanych własnościach.

W tym celu założymy, że $a_n = cq^{n-1}$, pamiętając, aby $c > 0$ oraz $0 < q < 1$. Wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} cq^{n-1} = \frac{c}{1-q}$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3 = \sum_{n=1}^{\infty} c^3 (q^3)^{n-1} = \frac{c^3}{1-q^3},$$

co po uwzględnieniu warunków zadania oraz prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} \frac{c}{1-q} = \frac{7}{2} \\ \frac{c^3}{1-q^3} = \frac{7}{2}, \end{cases} \quad (\spadesuit)$$

czyli

$$\begin{cases} 2c = 7(1-q) \\ 2c^3 = 7(1-q^3). \end{cases}$$

Z pierwszego równania otrzymujemy

$$c = \frac{7(1-q)}{2},$$

co po podstawieniu do drugiego równania daje kolejno

$$2 \frac{7^3(1-q)^3}{2^3} = 7(1-q^3)$$

$$\frac{7^2(1-q)^3}{4} = 1-q^3$$

$$7^2(1-q)^3 = 4(1-q)(1+q+q^2)$$

$$7^2(1-q)^2 = 4(1+q+q^2)$$

$$49q^2 - 98q + 49 = 4q^2 + 4q + 4$$

$$45q^2 - 102q + 45 = 0 \quad (\heartsuit)$$

$$15q^2 - 34q + 15 = 0.$$

Otrzymane równanie kwadratowe ma rozwiązania

$$\begin{aligned} q &= \frac{34 \pm \sqrt{34^2 - 4 \cdot 15 \cdot 15}}{30} = \frac{17 \pm \sqrt{17^2 - 15^2}}{15} = \frac{17 \pm \sqrt{(17-15)(17+15)}}{15} = \\ &= \frac{17 \pm \sqrt{2 \cdot 32}}{15} = \frac{17 \pm \sqrt{64}}{15} = \frac{17 \pm 8}{15}, \end{aligned}$$

co wobec warunku $q < 1$ wymaga przyjęcia „ $\pm$ ” = „ $-$ ”. Ostatecznie otrzymujemy

$$q = \frac{17-8}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5},$$

skąd

$$c = \frac{7(1-q)}{2} = \frac{7}{5}.$$

Otrzymane rozwiązanie $q = 3/5$, $c = 7/5$ prowadzi do

$$a_n = cq^{n-1} = \frac{7 \cdot 3^{n-1}}{5^n}.$$

Odpowiedź: Przykładem szeregu spełniającego warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7 \cdot 3^{n-1}}{5^n}.$$

478. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = 1.$$

Rozwiązanie:

Spróbujemy znaleźć szereg geometryczny o żądanych własnościach.

W tym celu założymy, że $a_n = aq^{n-1}$, pamiętając, aby $a > 0$ oraz $0 < q < 1$. Wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a(-q)^{n-1} = \frac{a}{1+q},$$

co prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} a = 3(1-q) \\ a = 1+q \end{cases}$$

mającego rozwiązanie $q = 1/2$, $a = 3/2$.

Odpowiedź: Przykładem szeregu spełniającego warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n}.$$

479. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że sumy szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^3, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4$$

są liczbami całkowitymi.

Rozwiązanie:

Rozważmy dowolny zbieżny szereg geometryczny o wyrazach wymiernych dodatnich, np.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

Wówczas sumy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 = \frac{1}{3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right)^3 = \frac{1}{7}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right)^4 = \frac{1}{15}$$

są liczbami wymiernymi.

Wystarczy teraz przemnożyć wyrazy wyjściowego szeregu geometrycznego przez najmniejszą wspólną wielokrotność mianowników powyższych sum, aby uzyskać przykład spełniający warunki zadania.

W naszym wypadku otrzymujemy

$$a_n = \frac{105}{2^n}$$

i w konsekwencji

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 105,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{105^2}{3} = 105 \cdot 35,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3 = \frac{105^3}{7} = 105^2 \cdot 15,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^4 = \frac{105^4}{15} = 105^3 \cdot 7.$$

480. Podać przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, że $a_n = 1/4^n$ dla nieskończenie wielu n , a ponadto

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 4.$$

Rozwiązanie:

Gdyby $a_n = 1/4^n$ dla każdego n , wówczas mielibyśmy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{3}.$$

Sumę szeregu możemy zwiększyć o $4 - 1/3 = 11/3$ zwiększając tylko jego pierwszy wyraz, co prowadzi nas do następującego przykładu:

$$a_1 = \frac{1}{4} + \frac{11}{3} = \frac{47}{12}, \quad a_n = \frac{1}{4^n} \quad \text{dla } n \geq 2.$$

481. Podać przykład takiego ciągu (a_n) , że szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ i $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n} + a_{2n+1})$ są zbieżne, a ponadto

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n}) = 5 \quad \text{oraz} \quad a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n} + a_{2n+1}) = 2.$$

Rozwiązanie:

Niech

$$a_1 = 2$$

oraz

$$a_n = 3 \cdot (-1)^n$$

dla $n \geq 2$.

Wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n}) = (2+3) + (-3+3) + (-3+3) + (-3+3) + \dots = 5 + 0 + 0 + 0 + \dots = 5$$

oraz

$$a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n} + a_{2n+1}) = 2 + (3-3) + (3-3) + (3-3) + \dots = 2 + 0 + 0 + 0 + \dots = 2.$$

482. Podać przykład takiego ciągu (a_n) , że szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n-2} + a_{3n-1} + a_{3n}), \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n-1} + a_{3n} + a_{3n+1}) \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n} + a_{3n+1} + a_{3n+2})$$

są zbieżne, a ponadto

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n-2} + a_{3n-1} + a_{3n}) = 6, \quad a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n-1} + a_{3n} + a_{3n+1}) = 1$$

oraz

$$a_1 + a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n} + a_{3n+1} + a_{3n+2}) = 3.$$

Rozwiązanie:

Niech

$$a_1 = 1$$

oraz

$$a_{3n-1} = 2, \quad a_{3n} = 3, \quad a_{3n+1} = -5$$

dla $n \geq 1$.

Wówczas

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n-2} + a_{3n-1} + a_{3n}) &= (1+2+3) + (-5+2+3) + (-5+2+3) + (-5+2+3) + \dots = \\ &= 6 + 0 + 0 + 0 + \dots = 6, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n-1} + a_{3n} + a_{3n+1}) &= 1 + (2+3-5) + (2+3-5) + (2+3-5) + \dots = \\ &= 1 + 0 + 0 + 0 + \dots = 1 \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n} + a_{3n+1} + a_{3n+2}) &= 1 + 2 + (3 - 5 + 2) + (3 - 5 + 2) + (3 - 5 + 2) + \dots = \\ &= 3 + 0 + 0 + 0 + \dots = 3. \end{aligned}$$

483. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}.$$

Rozwiązanie:

Szukamy takich liczb A i B , że

$$\frac{1}{n^2 - 1} = \frac{1}{(n-1)(n+1)} = \frac{A}{n-1} + \frac{B}{n+1}.$$

Po wymnożeniu prawej równości stronami przez $(n-1)(n+1)$ otrzymujemy

$$1 = A(n+1) + B(n-1).$$

Dla $n = 1$ otrzymujemy $A = 1/2$, natomiast przyjęcie $n = -1$ daje $B = -1/2$.

Zatem N -ta suma częściowa danego szeregu wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^N \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \left(\frac{1}{N-3} - \frac{1}{N-1} \right) + \left(\frac{1}{N-2} - \frac{1}{N} \right) + \left(\frac{1}{N-1} - \frac{1}{N+1} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} \right), \end{aligned}$$

co przy N dążącym do $+\infty$ zbiega do $3/4$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg ma sumę równą $3/4$.

484. Podać przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o sumie równej $1/2$, że dla nieskończenie wielu liczb naturalnych n liczba a_n jest całkowita.

Rozwiązanie:

Wystarczy przyjąć $a_1 = 1/2$ oraz $a_n = 0$ dla $n \geq 2$.

485. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3 + (-1)^n)^n}.$$

Rozwiązanie:

Początek danego w zadaniu szeregu wygląda następująco

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{4^8} + \dots$$

Ponieważ szereg ma wyrazy dodatnie, jego suma nie zmieni się przy zmianie kolejności sumowania jego wyrazów.

Zauważmy, że wyrazy o indeksach nieparzystych tworzą ciąg geometryczny o ilorazie $1/4$ i pierwszym wyrazie $1/2$. Ponieważ suma szeregu geometrycznego o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q , gdzie $|q| < 1$, jest równa

$$\frac{a_1}{1-q},$$

otrzymujemy

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} + \dots = \frac{1/2}{1-1/4} = \frac{2}{3}.$$

Podobnie, wyrazy o indeksach parzystych tworzą ciąg geometryczny o ilorazie $1/16$ i pierwszym wyrazie $1/16$. Przy tym

$$\frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{4^8} + \dots = \frac{1}{15}.$$

Suma danego w zadaniu szeregu jest więc równa

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{15} = \frac{11}{15}.$$

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg ma sumę równą $11/15$.

486. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{8n^k + \sqrt{n}} - 4}{8n^4 - 3n^3 + 5}$$

w zależności od parametru naturalnego k .

Rozwiązanie:

Szacujemy dany w zadaniu szereg od góry

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{8n^k + \sqrt{n}} - 4}{8n^4 - 3n^3 + 5} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{8n^k + n^k} - 0}{8n^4 - 3n^4 + 0} = \frac{3}{5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4-k/2}}.$$

Ostatni szereg jest zbieżny, gdy $4 - k/2 > 1$, czyli $k < 6$. Zatem na mocy kryterium porównawczego wyjściowy szereg jest zbieżny dla $k \leq 5$.

Szacowanie z dołu prowadzi do

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{8n^k + \sqrt{n}} - 4}{8n^4 - 3n^3 + 5} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{8n^k + 0} - 4n^k}{8n^4 - 0 + 5n^4} = \frac{2}{13} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4-k/2}}.$$

Ostatni szereg jest rozbieżny, gdy $4 - k/2 \leq 1$, czyli $k \geq 6$. Zatem na mocy kryterium porównawczego wyjściowy szereg jest rozbieżny dla $k \geq 6$.

Odpowiedź: Szereg jest zbieżny dla $k \leq 5$, a rozbieżny dla $k \geq 6$.

487. Rozstrzygnąć zbieżność szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^k + 1}}{n^7 + 1} \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^{k+1} + 1}}{n^7 + 1}$$

dla tak dobranej wartości parametru naturalnego k , że dokładnie jeden z tych szeregów jest zbieżny.

Rozwiązanie:

Przyjmujemy $k = 11$ i zastosujemy kryterium porównawcze, szacując pierwszy szereg od góry, a drugi od dołu.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^{11}+1}}{n^7+1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^{11}+3n^{11}}}{n^7+0} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < +\infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^{12}+1}}{n^7+1} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^{12}+0}}{n^7+n^7} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

Odpowiedź: Dla $k = 11$ pierwszy szereg jest zbieżny, a drugi rozbieżny.

488. Podać przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach nieujemnych i sumie równej 1, że dla nieskończenie wielu liczb naturalnych n zachodzi równość $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Rozwiązanie:

Wystarczy przyjąć $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ dla $n \in \{4^k : k \in \mathbb{N}\}$ oraz $a_n = 0$ dla pozostałych n .

489. Podać przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{a_n}{n}}$$

jest rozbieżny.

Rozwiązanie:

Wystarczy przyjąć $a_1 = 0$ oraz $a_n = \frac{1}{n(\ln n)^2}$ dla $n > 1$.

490. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)! \cdot a^n}{n! \cdot n^{2n}}$$

w zależności od parametru rzeczywistego dodatniego a . Dla jednej wartości a można nie udzielić odpowiedzi.

Rozwiązanie:

Stosując kryterium d'Alemberta otrzymujemy

$$\frac{(3n+3)! \cdot a^{n+1}}{(n+1)! \cdot (n+1)^{2n+2}} \cdot \frac{n! \cdot n^{2n}}{(3n)! \cdot a^n} = \frac{(3n+1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+3) \cdot a}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} \cdot (n+1)^3} \rightarrow \frac{27a}{e^2},$$

skąd wynika, że szereg jest zbieżny, gdy

$$\frac{27a}{e^2} < 1, \quad \text{czyli} \quad a < \frac{e^2}{27}$$

oraz rozbieżny, gdy

$$\frac{27a}{e^2} > 1, \quad \text{czyli} \quad a > \frac{e^2}{27}.$$

491. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{3n}{n}}{6^n}.$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy $a_n = \frac{\binom{3n}{n}}{6^n}$.

Stosując kryterium d'Alemberta otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\binom{3n+3}{n+1}}{6^{n+1}} \cdot \frac{6^n}{\binom{3n}{n}} = \frac{(3n+3)! \cdot 6^n \cdot n! \cdot (2n)!}{(n+1)! \cdot (2n+2)! \cdot 6^{n+1} \cdot (3n)!} = \\ &= \frac{(3n)! \cdot (3n+1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+3) \cdot 6^n \cdot n! \cdot (2n)!}{n! \cdot (n+1) \cdot (2n)! \cdot (2n+1) \cdot (2n+2) \cdot 6^{n+1} \cdot (3n)!} = \\ &= \frac{(3n+1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+3)}{(n+1) \cdot (2n+1) \cdot (2n+2) \cdot 6} \rightarrow \frac{27}{24} = \frac{9}{8} > 1. \end{aligned}$$

Zatem na mocy kryterium d'Alemberta dany w zadaniu szereg jest rozbieżny.

492. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{3n}{n}}{7^n}.$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy $a_n = \frac{\binom{3n}{n}}{7^n}$.

Stosując kryterium d'Alemberta otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\binom{3n+3}{n+1}}{7^{n+1}} \cdot \frac{7^n}{\binom{3n}{n}} = \frac{(3n+3)! \cdot 7^n \cdot n! \cdot (2n)!}{(n+1)! \cdot (2n+2)! \cdot 7^{n+1} \cdot (3n)!} = \\ &= \frac{(3n)! \cdot (3n+1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+3) \cdot 7^n \cdot n! \cdot (2n)!}{n! \cdot (n+1) \cdot (2n)! \cdot (2n+1) \cdot (2n+2) \cdot 7^{n+1} \cdot (3n)!} = \\ &= \frac{(3n+1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+3)}{(n+1) \cdot (2n+1) \cdot (2n+2) \cdot 7} \rightarrow \frac{27}{28} < 1. \end{aligned}$$

Zatem na mocy kryterium d'Alemberta dany w zadaniu szereg jest zbieżny.

493. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^{1000}}{2^{n^2}}.$$

Rozwiązanie:

Zastosujemy kryterium d'Alemberta. Oznaczmy

$$a_n = \frac{(n!)^{1000}}{2^{n^2}}.$$

Wówczas (szereg ma wyrazy dodatnie, więc nie musimy pisać modułu)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((n+1)!)^{1000}}{2^{n^2+2n+1}} \cdot \frac{2^{n^2}}{(n!)^{1000}} = \frac{(n+1)^{1000}}{2^{2n+1}} = b_n.$$

Ponieważ trudno jest określić, do czego dąży b_n przy $n \rightarrow \infty$, stosujemy kryterium d'Alemberta do ciągu (b_n) . Otrzymujemy

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+2)^{1000}}{2^{2n+3}} \cdot \frac{2^{2n+1}}{(n+1)^{1000}} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{1000} \rightarrow \frac{1^{1000}}{4} = \frac{1}{4}.$$

Z kryterium d'Alemberta w wersji dla ciągów wynika, że skoro granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1}{4} < 1$$

istnieje i jest mniejsza od 1, to ciąg (b_n) jest zbieżny do zera.

Tym samym

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1$$

i na mocy kryterium d'Alemberta w wersji dla szeregów, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg jest zbieżny.

494. Czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} n^p$ jest zbieżny dla $p = 3 - \log_2 k$, gdzie

- a) $k = 8$; **N**
- b) $k = 12$; **N**
- c) $k = 16$; **N**
- d) $k = 20$; **T**

495. Czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^p$ jest zbieżny dla $p = 3 - \log_2 k$, gdzie

- a) $k = 8$; **N**
- b) $k = 12$; **T**
- c) $k = 16$; **T**
- d) $k = 20$; **T**

496. Czy podany szereg jest zbieżny

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+3}}$ **TAK**

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2} \sqrt[3]{n+3}}$ **TAK**

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2+9}}$ **TAK**

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2} \sqrt[3]{n^2+9}}$ **TAK**

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+3}}$ **NIE**

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2} \sqrt[3]{n+3}}$ **NIE**

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+9}}$ **NIE**

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2} \sqrt[3]{n^2+9}}$ **TAK**

$$\text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n+2}}{\sqrt[3]{n+3}} \text{ NIE}$$

$$\text{j)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt[3]{n+3}} \text{ NIE}$$

$$\text{k)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt[3]{n^2+9}}{\sqrt{n+2}} \text{ NIE}$$

$$\text{l)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \sqrt[3]{n^2+9}}{\sqrt{n+2}} \text{ NIE}$$

497. W każdym z poniższych 16 pytań w miejscu kropek postaw jedną z liter **Z**, **R**, **N**:

Z - jest **Z**bieżny (tzn. musi być zbieżny)

R - jest **R**ozbieżny (tzn. musi być rozbieżny)

N - może być zbieżny lub rozbieżny (tzn. **N**ie wiadomo, czasem jest zbieżny, a czasem rozbieżny)

Wiadomo, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest rozbieżny, ciąg (c_n) jest zbieżny, ciąg (d_n) jest rozbieżny. Co można wywnioskować o zbieżności

a) ciągu (a_n) **Z**

b) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ **N**

c) ciągu (b_n) **N**

d) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ **R**

e) ciągu $(a_n + b_n)$ **N**

f) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ **R**

g) ciągu $(c_n + d_n)$ **R**

h) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (c_n + d_n)$ **R**

i) ciągu $(a_n + c_n)$ **Z**

j) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + c_n)$ **N**

k) ciągu $(a_n + d_n)$ **R**

l) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + d_n)$ **R**

m) ciągu $(b_n + c_n)$ **N**

n) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n + c_n)$ **N**

o) ciągu $(b_n + d_n)$ **N**

p) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n + d_n)$ **N**

W każdym z czterech kolejnych zadań udziel sześciu odpowiedzi **TAK/NIE**.

498. Czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} n^k$ jest zbieżny, jeżeli

a) $k = -3/2$ **TAK**

b) $k = 3/2$ **NIE**

c) $k = -1$ **NIE**

d) $k = 1$ **NIE**

e) $k = -1/2$ **NIE**

f) $k = 1/2$ **NIE**

499. Czy szereg $\sum_{k=1}^{\infty} n^k$ jest zbieżny, jeżeli

a) $n = -3/2$ **NIE**

b) $n = 3/2$ **NIE**

c) $n = -1$ **NIE**

d) $n = 1$ **NIE**

e) $n = -1/2$ **TAK**

f) $n = 1/2$ **TAK**

N - może być zbieżny lub rozbieżny (tzn. **N**ie wiadomo, czasem jest zbieżny, a czasem rozbieżny)

Wiadomo, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, jego suma jest równa 10, a pierwszy wyraz jest równy 3. Co można wywnioskować o zbieżności poniższego szeregu i o jego sumie

a) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{a_n} = \mathbf{R}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 + a_n) = \mathbf{R}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 \cdot a_n) = \mathbf{30}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n) = \mathbf{-3}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1}^2 - a_n^2) = \mathbf{-9}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} (2^{a_{n+1}} - 2^{a_n}) = \mathbf{-7}$

511. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (3n-4) \cdot (3n-1)}{n^3 - n}$.

Rozwiązanie:

Szereg jest zbieżny. Aby to udowodnić, skorzystamy z kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

W tym celu musimy zweryfikować prawdziwość trzech założeń tego kryterium.

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne - oczywiste.

2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.

Sprawdzamy to następująco:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n-4) \cdot (3n-1)}{n^3 - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(3 - \frac{4}{n}\right) \cdot \left(3 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n^2}} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 0}{1 - 0} = 0.$$

3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.

Ten warunek jest najmniej oczywisty. Aby go udowodnić, powinniśmy wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 2$ zachodzi nierówność

$$\frac{(3n-4) \cdot (3n-1)}{n^3 - n} \geq \frac{(3n-1) \cdot (3n+2)}{(n+1)^3 - (n+1)},$$

czyli po zastosowaniu tożsamości

$$x^3 - x = (x-1) \cdot x \cdot (x+1)$$

dla $x = n$ oraz $x = n+1$

$$\frac{(3n-4) \cdot (3n-1)}{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)} \geq \frac{(3n-1) \cdot (3n+2)}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)},$$

co kolejno jest równoważne nierównościom

$$\begin{aligned}\frac{3n-4}{n-1} &\geq \frac{3n+2}{n+2} \\ (3n-4) \cdot (n+2) &\geq (3n+2) \cdot (n-1) \\ 3n^2 + 6n - 4n - 8 &\geq 3n^2 - 3n + 2n - 2 \\ 3n^2 + 2n - 8 &\geq 3n^2 - n - 2 \\ 3n &\geq 6 \\ n &\geq 2.\end{aligned}$$

Zatem dowodzona nierówność jest prawdziwa dla wszystkich liczb naturalnych $n \geq 2$.

W konsekwencji szereg dany w treści zadania jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

512. Rozstrzygnąć, czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{n^2 + 9900}$$

jest zbieżny.

Rozwiązanie:

Udowodnimy zbieżność szeregu korzystając z kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

W tym celu trzeba wykazać spełnianie trzech warunków:

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne.

Jest to oczywiste.

2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + 9900} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{9900}{n^2}} = \frac{0}{1+0} = 0.$$

3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.

W tym celu trzeba udowodnić nierówność

$$\frac{n}{n^2 + 9900} \geq \frac{n+1}{(n+1)^2 + 9900}.$$

Przekształcając powyższą nierówność otrzymujemy kolejno:

$$\begin{aligned}n \cdot (n^2 + 2n + 9901) &\geq (n+1) \cdot (n^2 + 9900), \\ n^3 + 2n^2 + 9901n &\geq n^3 + n^2 + 9900n + 9900, \\ n^2 + n &\geq 9900, \\ n \cdot (n+1) &\geq 99 \cdot 100.\end{aligned}$$

Ponieważ prawa strona powyższej nierówności jest stała, a lewa rośnie wraz z n , a ponadto dla $n = 99$ zachodzi równość, widzimy, że nierówność jest prawdziwa dla $n \geq 99$.

Oznacza to, że dany w zadaniu szereg nie spełnia założeń kryterium Leibniza, ale spełnia je szereg $\sum_{n=99}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{n^2 + 9900}$, który wobec tego jest zbieżny. Ponieważ zbieżność szeregu nie zależy od zmiany lub pominięcia skończenie wielu wyrazów, zbieżny jest także szereg dany w treści zadania.

513. Wśród poniższych sześciu szeregów wskaż szereg zbieżny, a następnie udowodnij jego zbieżność. Jeśli potrafisz, podaj jego sumę.

$$\begin{array}{lll} \text{(A)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{7n+10} & \text{(B)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n^2+1)}{3n^2+n} & \text{(C)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)}{n^2+n} \\ \text{(D)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n^2+1)}{2n^2+1} & \text{(E)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (3n^2+1)}{77n-1} & \text{(F)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)}{2011n+2012} \end{array}$$

Rozwiązanie:

Szeregiem zbieżnym jest szereg **(C)**.

Aby to udowodnić, skorzystamy z kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych. W tym celu musimy zweryfikować prawdziwość trzech założeń tego kryterium.

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne - oczywiste.

2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.

Sprawdzamy to następująco:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n^2+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{0-0}{1+0} = 0.$$

3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.

Ten warunek jest najmniej oczywisty. Aby go udowodnić, powinniśmy wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\frac{2n-1}{n(n+1)} \geq \frac{2n+1}{(n+1)(n+2)},$$

czyli

$$\frac{2n-1}{n} \geq \frac{2n+1}{n+2},$$

co kolejno jest równoważne nierównościom

$$(2n-1)(n+2) \geq (2n+1)n$$

$$2n^2 + 3n - 2 \geq 2n^2 + n$$

$$2n \geq 2$$

$$n \geq 1,$$

a to jest prawdziwe dla wszystkich liczb naturalnych n .

Zatem na mocy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych szereg **(C)** jest zbieżny.

W celu obliczenia sumy szeregu (C) rozkładamy jego wyrazy na ułamki proste:

$$\frac{2n-1}{n^2+n} = \frac{2n-1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}$$

$$2n-1 = A(n+1) + Bn$$

$$2n-1 = An + A + Bn$$

$$2 = A + B, \quad -1 = A$$

$$A = -1, \quad B = 3.$$

Wykorzystujemy otrzymany rozkład do rozłożenia szeregu na sumę dwóch szeregów przypominających szereg anharmoniczny.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)}{n^2+n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-(-1)^n}{n} + \frac{3 \cdot (-1)^n}{n+1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} + 3 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

W drugim szeregu zmieniamy numerację podstawiając $k = n+1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} + 3 \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} + 3 \cdot \left(\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right) - 1 \right) = 4\ln 2 - 3.$$

W ostatniej równości skorzystaliśmy ze znajomości sumy szeregu anharmonicznego:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2.$$

Odpowiedź: Suma szeregu (C) jest równa $4\ln 2 - 3$.

514. Dowieść, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n \cdot (n+1)}{(2n+1) \cdot (2n+3) \cdot (2n+5)}$$

jest zbieżny, ale nie jest bezwzględnie zbieżny.

Rozwiązanie:

Aby udowodnić zbieżność szeregu, stosujemy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

W tym celu trzeba wykazać spełnianie trzech warunków:

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne.

Jest to oczywiste.

2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot (n+1)}{(2n+1) \cdot (2n+3) \cdot (2n+5)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\left(2 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 + \frac{3}{n}\right) \cdot \left(2 + \frac{5}{n}\right)} = \frac{0 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 0.$$

3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.

W tym celu trzeba udowodnić nierówność

$$\frac{n \cdot (n+1)}{(2n+1) \cdot (2n+3) \cdot (2n+5)} \geq \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{(2n+3) \cdot (2n+5) \cdot (2n+7)}.$$

Przekształcając powyższą nierówność otrzymujemy kolejno:

$$\begin{aligned}\frac{n}{(2n+1)} &\geq \frac{(n+2)}{(2n+7)} \\ n \cdot (2n+7) &\geq (n+2) \cdot (2n+1) \\ 2n^2 + 7n &\geq 2n^2 + 5n + 2 \\ 2n &\geq 2 \\ n &\geq 1,\end{aligned}$$

co jest prawdziwe dla każdej liczby naturalnej n .

W celu udowodnienia, że szereg wartości bezwzględnych jest rozbieżny, stosujemy kryterium porównawcze:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot (n+1)}{(2n+1) \cdot (2n+3) \cdot (2n+5)} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot (n+0)}{(2n+n) \cdot (2n+3n) \cdot (2n+5n)} = \frac{1}{105} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

515. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n^7 - 2n + 4) \cdot (-1)^n}{5n^9 - 3n^8 + 1000}.$$

Rozwiązanie:

Skorzystamy z kryterium zbieżności bezwzględnej:

Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Szacując od góry szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(3n^7 - 2n + 4) \cdot (-1)^n}{5n^9 - 3n^8 + 1000} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^7 - 2n + 4}{5n^9 - 3n^8 + 1000} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^7 - 0 + 4n^7}{5n^9 - 3n^9 + 0} = \frac{7}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

i korzystając z kryterium porównawczego stwierdzamy, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(3n^7 - 2n + 4) \cdot (-1)^n}{5n^9 - 3n^8 + 1000} \right|$$

jest zbieżny, a co za tym idzie, zbieżny jest także szereg dany w treści zadania.

Uwaga:

Kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych w tym zadaniu jest praktycznie bezużyteczne, chociaż na upartego można rozwiązać zadanie z użyciem tego kryterium. Wymaga to jednak dużej dojrzałości rachunkowej, gdyż trzeba zapanować nad dosyć skomplikowanymi nierównościami.

516. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^8 - 2n + 4}{5n^9 - 3n^8 + 1000}.$$

Rozwiązanie:

Szacując wyrazy szeregu od dołu otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^8 - 2n + 4}{5n^9 - 3n^8 + 1000} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^8 - 2n^8 + 0}{5n^9 - 0 + 1000n^9} = \frac{1}{1005} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Stąd na mocy kryterium porównawczego dany w zadaniu szereg jest rozbieżny.

517. Podać przykład takiego ciągu (a_n) , że szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^6$ są zbieżne, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^4$ jest rozbieżny.

Rozwiązanie:

Niech

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n}}.$$

Wówczas szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n}}$$

jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych, gdyż wartości bezwzględne jego wyrazów $|a_n| = 1/\sqrt[4]{n}$ tworzą ciąg malejący zbieżny do zera, a przy tym kolejne wyrazy mają różne znaki.

Ponadto szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^4 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

jest rozbieżny jako szereg harmoniczny, natomiast szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^6 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

jest zbieżny, gdyż szeregi postaci $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ są zbieżne dla $p > 1$.

518. Podać przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o sumie równej 4, że dla nieskończenie wielu liczb naturalnych n zachodzi równość $a_n = \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$.

Rozwiązanie:

Jednym z prostszych przykładów jest szereg określony wzorami

$$a_1 = 4$$

oraz

$$a_{2n} = \frac{1}{\sqrt[4]{2n}}, \quad a_{2n+1} = -\frac{1}{\sqrt[4]{2n}}$$

dla $n \geq 1$.

Wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 4 + \frac{1}{\sqrt[4]{2}} - \frac{1}{\sqrt[4]{2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{4}} - \frac{1}{\sqrt[4]{4}} + \frac{1}{\sqrt[4]{6}} - \frac{1}{\sqrt[4]{6}} + \dots$$

519. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 2$ wyraz a_n jest dodatni, a ponadto

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = 13.$$

Rozwiązanie:

Gdyby szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ miał wszystkie wyrazy nieujemne, zachodziłaby równość

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|,$$

co przeczy warunkom zadania. Stąd wynika, że wyraz a_1 jest ujemny jako jedyny, którego dodatniość nie jest wymuszona założeniami podanymi w treści zadania.

Niech $S = \sum_{n=2}^{\infty} a_n$. Wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + S$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = -a_1 + S,$$

skąd

$$\begin{cases} a_1 + S = 1 \\ -a_1 + S = 13, \end{cases}$$

co prowadzi do $a_1 = -6$ oraz $S = 7$.

To pozwala opisać wszystkie szeregi spełniające warunki zadania: pierwszy wyraz musi być równy -6 , a pozostałe wyrazy muszą być dodatnie i mieć sumę 7 . Jednak polecenie zadania wymaga podania przykładu, więc w rozwiązaniu musimy wskazać jakiś konkretny szereg.

Wychodząc od równości

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}$$

otrzymujemy

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{14}{2^n} = 7,$$

co pozwala przyjąć $a_1 = -6$ oraz $a_n = \frac{14}{2^n}$ dla $n \geq 2$.

Odpowiedź: Przykładem szeregu spełniającego warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

gdzie

$$a_1 = -6 \quad \text{oraz} \quad a_n = \frac{14}{2^n} \quad \text{dla } n \geq 2.$$

W każdym z 5 kolejnych zadań udziel czterech **niezależnych** odpowiedzi:

Z - jest **Zbieżny** (tzn. musi być zbieżny)

R - jest **Rozbieżny** (tzn. musi być rozbieżny)

N - może być zbieżny lub rozbieżny (tzn. Nie wiadomo, czasem jest zbieżny, a czasem rozbieżny)

520. Ciąg (a_n) liczb rzeczywistych dodatnich jest zbieżny do liczby rzeczywistej g . Co można wywnioskować o zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, jeżeli wiadomo, że

a) $g = 0$ **N**

b) $0 < g < 1$ **R**

c) $g = 1$ **R**

d) $1 < g$ **R**

521. O ciągu (a_n) liczb rzeczywistych dodatnich wiadomo, że ciąg $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ jest zbieżny do liczby rzeczywistej g . Co można wywnioskować o zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, jeżeli wiadomo, że

a) $g = 0$ **Z**

b) $0 < g < 1$ **Z**

c) $g = 1$ **N**

d) $1 < g$ **R**

522. O ciągu (a_n) liczb rzeczywistych dodatnich wiadomo, że ciąg $\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ jest zbieżny do liczby rzeczywistej g . Co można wywnioskować o zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, jeżeli wiadomo, że

a) $g = 0$ **R**

b) $0 < g < 1$ **R**

c) $g = 1$ **N**

d) $1 < g$ **Z**

523. Ciąg (a_n) liczb rzeczywistych dodatnich jest zbieżny do liczby rzeczywistej g . Co można wywnioskować o zbieżności ciągu $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$, jeżeli wiadomo, że

a) $g = 0$ **N**

b) $0 < g < 1$ **Z**

c) $g = 1$ **Z**

d) $1 < g$ **Z**

524. O ciągu (a_n) liczb rzeczywistych wiadomo, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny i jego sumą jest liczba rzeczywista g . Co można wywnioskować o zbieżności ciągu (a_n) , jeżeli wiadomo, że

a) $g = 0$ **Z**

b) $0 < g < 1$ **Z**

c) $g = 1$ **Z**

d) $1 < g$ **Z**