

Ćwiczenia 17.12.2013: zad. 525-547

Ćwiczenia 14.01.2014: zad. 554-588

Konwersatorium, wykład: zad. 548-553 oraz 589-604

Kolokwium nr 10 — 7.01.2014 (wtorek, 13:15-14:00): materiał z zad. 1-547 oraz 657-658

Kolokwium nr 11 — 13.01.2014 (poniedziałek, 13:15-14:00): materiał z zad. 1-553 oraz 651-658

Kolokwium nr 12 — 20.01.2014 (poniedziałek, 13:15-14:00): materiał z zad. 1-658

Funkcje. Granica i ciągłość.**Uwaga:** Zapis $\operatorname{sgn}(x)$ oznacza znak liczby x :

$$\operatorname{sgn}(x) = 1 \text{ dla } x > 0$$

$$\operatorname{sgn}(x) = 0 \text{ dla } x = 0$$

$$\operatorname{sgn}(x) = -1 \text{ dla } x < 0$$

Uwaga: Zapis $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x . $\{x\} = x - [x]$, gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x .Naszkicować wykres funkcji f danej wzorem

525. $\operatorname{sgn}(\sin x)$ 526. $\{x\} - (\{x\})^2$

527.
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ x & \text{dla } 0 \leq x < 1 \\ -x^2 + 4x - 2 & \text{dla } 1 \leq x < 3 \\ 4 - x & \text{dla } x \geq 3 \end{cases}$$

528.
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \neq 2 \\ \operatorname{sgn}(x) & \text{dla } x = 2 \end{cases}$$
 529. $\frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$ 530. $\frac{1}{\{x\}}$

531. $\operatorname{sgn}(x^3 - x)$ 532. $x^3 \operatorname{sgn}(x)$ 533. $\left| \left[x + \frac{1}{2} \right] - x \right|$

534. $f(x) = |x^2 - 1| - |x^2 - 4|$ 535. $f(x) = |x^2 - 8x + 15|$

536. $f(x) = x^2 + x + 2 - |x^2 - x - 2|$ 537. $f(x) = \{\cos x\}$

538. $f(x) = \left[\frac{4}{\pi} \arctan x \right]$ 539. $f(x) = 2\{\sin x\} - \{2\sin x\}$

540. $f(x) = [x] + x$ 541. $f(x) = \{x\} + x$ 542. $f(x) = \left[\left| x - \frac{1}{2} \right| \right]$

Wskażać taką liczbę M , że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność

$$|f(x)| \leq M.$$

543. $f(x) = \frac{2x^4 + 13x^2 + 7}{5x^4 + x^2 + 2}$ 544. $f(x) = \frac{5x^4 + x^2 + 2}{2x^4 + 13x^2 + 7}$ 545. $f(x) = e^{\sin x}$

546. $f(x) = \frac{x}{x^4 + 3}$ 547. $f(x) = \frac{x^{1000}}{2^{|x|}}$

548. Wskazać odpowiednie liczby wymierne dodatnie C oraz δ , a następnie udowodnić, że

$$\forall_{x \in (27 - \delta, 27 + \delta)} \left| \sqrt[3]{x} - C \right| < \frac{1}{1000}.$$

549. Wskazać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C , a następnie udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq C \cdot |x - y|,$$

gdzie $f(x) = \sqrt{x^2 + 2011}$.

Dla podanej funkcji f wyprowadzić oszacowanie postaci

$$|f(x) - f(x_0)| < C \cdot \delta$$

prawdziwe dla dowolnego $\delta > 0$ oraz dowolnych $x, x_0 \in D_f$ spełniających warunek $|x - x_0| < \delta$.

550. $f(x) = \sqrt{x}$, $D_f = [1, +\infty)$ **551.** $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $D_f = \mathbb{R}$

552. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$, $D_f = \mathbb{R}$ **553.** $f(x) = x^3$, $D_f = [-10, 5]$

Obliczyć następujące granice:

554. $\lim_{x \rightarrow 7} \left(\frac{1}{x-7} - \frac{8}{x^2 - 6x - 7} \right)$ **555.** $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$ **556.** $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-1/x^2}$

557. $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 8}$ **558.** $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x + 2}$ **559.** $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 5}$

560. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$ **561.** $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2008} - 1}{x^{10} - 1}$ **562.** $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1}$

563. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}$ **564.** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ **565.** $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2 - 1}$

566. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}}$ **567.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ **568.** $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ **569.** $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{1 + \ln x}$

570. $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{2^{1/x} + 1}{2^{1/x} - 1}$ **571.** $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{2^{1/x} + 1}{2^{1/x} - 1}$ **572.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{1/x} - 1}{2^{1/x} + 1}$

573. Dla których wartości parametrów a, b funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{dla } x < 1 \\ x^2 & \text{dla } 1 \leq x < 2 \\ ax - b & \text{dla } 2 \leq x \end{cases}$$

jest ciągła? Naszkicować wykres funkcji f dla każdej pary parametrów (a, b) , dla których funkcja f jest ciągła.

574. Dla których wartości parametrów a, b funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x < 1 \\ x^2 + ax + b & \text{dla } 1 \leq x < 2 \\ x + 3 & \text{dla } 2 \leq x \end{cases}$$

jest ciągła? Naszkicować wykres funkcji f dla każdej pary parametrów (a, b) , dla których funkcja f jest ciągła.

Do podanych f , x_0 i ε dobrać takie δ , aby

$$\forall_{x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)} |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

575. $f(x) = 2x$, $x_0 = 5$, $\varepsilon = 1/10$ **576.** $f(x) = 1/x$, $x_0 = 4$, $\varepsilon = 1/100$

577. $f(x) = x^2$, $x_0 = 1$, $\varepsilon = 1/50$ **578.** $f(x) = x^3$, $x_0 = 0$, $\varepsilon = 1/1000$

579. $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 30$, $\varepsilon = 1/10$ **580.** $f(x) = x^4$, $x_0 = 10$, $\varepsilon = 10^{-10}$

Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem

$$\begin{array}{lll} \mathbf{581.} & f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} + \frac{x}{2} & \mathbf{582.} & f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2} & \mathbf{583.} & f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 + 5x + 4} + |x| \\ \mathbf{584.} & f(x) = \log_4(2^x + 8^x) & & & & \end{array}$$

Do podanych f , x_0 i ε dobrać takie $k \in \mathbb{N}$ (dowolne, nie musi być najmniejsze), aby przy $\delta = 10^{-k}$ spełniony był warunek

$$\forall_{x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)} |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$\mathbf{585.} \quad f(x) = x^{10}, \quad x_0 = 2, \quad \varepsilon = 1/10 \quad \mathbf{586.} \quad f(x) = x^{100}, \quad x_0 = 5, \quad \varepsilon = 10^{-10}$$

$$\mathbf{587.} \quad f(x) = x^{1000}, \quad x_0 = 10, \quad \varepsilon = 10^{100} \text{ (tak, do **plus** setnej)}$$

$$\mathbf{588.} \quad f(x) = x^{1/10}, \quad x_0 = 1111, \quad \varepsilon = 10^{-5}$$

OSZUSTWO 589. (przykład funkcji nieciągłej): Funkcja $f(x) = x^2$ jest nieciągła.

Dowód: Przeprowadzimy dowód nie wprost. Zakładając, że funkcja f jest ciągła, weźmy w definicji Cauchy'ego ciągłości $\varepsilon = 1$. Wtedy istnieje takie $\delta > 0$, że dla y spełniających nierówność $|y - x| < \delta$ zachodzi $|x^2 - y^2| < 1$.

Jednak ta ostatnia nierówność nie zawsze jest prawdziwa, gdyż dla $x > \frac{1}{\delta}$ i $y = x + \frac{\delta}{2}$ otrzymujemy $|x^2 - y^2| = x\delta + \frac{\delta^2}{4} > 1$.

□

OSZUSTWO 590. Niech $f, g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ będą takimi funkcjami ciągłymi, że $f(0) = 5$, $f(1) = 7$, $g(0) = 8$, $g(1) = 4$. Wtedy istnieje takie $c \in (0, 1)$, że $f(c) = g(c)$.

Dowód: Z własności Darboux funkcji ciągłych zastosowanej do funkcji f wynika, że dla pewnego $c \in (0, 1)$ mamy $f(c) = 6$. Podobnie, stosując własność Darboux do funkcji g otrzymujemy $g(c) = 6$. A zatem $f(c) = g(c)$, co należało dowieść. □

Wskazać błąd w powyższym rozumowaniu i podać poprawny dowód.

591. Dowieść, że równanie

$$x^{1000000} + 2 = (1,000001)^x$$

ma co najmniej jedno rozwiązanie rzeczywiste. Wskazać konkretny (być może niepotrzebnie duży) przedział, w którym znajduje się rozwiązanie.

592. Dla których liczb

$$n \in \{2, 4, 10, 20, 50, 100, 200, 500, 1000, 10^5, 10^{10}, 10^{30}, 10^{100}, 10^{1000}\}$$

wykres funkcji

$$f(x) = 2^x$$

przecina wykres funkcji

$$g(x) = x^n + 4,$$

jeżeli za jednostkę na osiach przyjmiemy 1 cm. Przyjąć promień wszechświata równy 10^{28} cm. Punkty przecięcia wykresów leżące w innych wszechświatach nas nie interesują.

Jak zmieni się odpowiedź, gdy wykonamy rysunek biorąc za jednostkę na osiach średnicę atomu (10^{-8} cm) lub średnicę jądra atomowego (10^{-13} cm)?

593. Dowieść, że równanie

$$x^2 = 25\pi^2 \cdot \cos x$$

ma co najmniej 10 rozwiązań rzeczywistych.

594. Dowieść, że równanie

$$x^2 = 25\pi^2 \cdot \cos(x^3)$$

ma więcej niż 1000 rozwiązań rzeczywistych.

Twierdzenie o trzech funkcjach: Jeżeli funkcje f, g, h są określone w otoczeniu punktu $x_0 \in [-\infty, +\infty]$ (mogą nie być określone w samym x_0), a przy tym

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

dla x bliskich x_0 , to z istnienia i równości granic funkcji f oraz h w punkcie x_0 wynika

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x).$$

To samo stosuje się do granic jednostronnych.

Obliczyć granice

595. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x^{1000})}{\sqrt{x}}$ **596.** $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \{1/x^{1000}\}$ (uwaga: część ułamkowa)

Korzystając ze zbieżności

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

obliczyć

597. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x^2+x}}$ **598.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{7x^2+5x+1}}$
599. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{x+1}}{(x+1)^x}$ **600.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}$ **601.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^x$
602. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x \cdot f(x)}$, gdzie $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$
603. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{(x+1)^x}$ **604.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{(x+1)^{x+1}}$

Zadania do samodzielnego rozwiązania.

W każdym z siedmiu poniższych zadań podaj wartość granicy funkcji (liczba rzeczywista) lub granicy niewłaściwej ($+\infty$ lub $-\infty$).

Wpisz literkę **R**, jeśli nie istnieje granica ani granica niewłaściwa.

605. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x+2} = \dots\dots$

606. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{3x+2}} = \dots\dots$

$$607. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{3x^2+2}} = \dots\dots$$

$$608. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{3x^3+2}} = \dots\dots$$

$$609. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{3x^2}\right)^x = \dots\dots$$

$$610. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{3x^2}\right)^{x^2} = \dots\dots$$

$$611. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{3x^2}\right)^{x^3} = \dots\dots$$

612. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = a\{x\}^3 + b\{x\}^2 + c\{x\} + d,$$

gdzie $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x .

W każdym z podpunktów uzupełnij brakującą liczbę tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczba o żądanej własności nie istnieje.

a) $a = \dots\dots$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$

b) $a = 1$, $b = \dots\dots$, $c = 3$, $d = 4$

c) $a = 1$, $b = 2$, $c = \dots\dots$, $d = 4$

d) $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = \dots\dots$

613. Podać wartości granic

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg x = \dots\dots$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \arctg x = \dots\dots$

c) $\lim_{x \rightarrow -1/\sqrt{3}} \arctg x = \dots\dots$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \arctg x = \dots\dots$

e) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \arctg x = \dots\dots$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg x = \dots\dots$

614. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = a \cdot A^{\{x\}} - b \cdot B^{\{x\}},$$

gdzie $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x , a wyrażenia $\{x\}$ występują w wykładnikach potęg.

W każdym z podpunktów uzupełnij brakującą liczbę rzeczywistą dodatnią tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczba rzeczywista dodatnia o żądanej własności nie istnieje.

a) $a = \dots\dots$, $A = 6$, $b = 5$, $B = 5$

b) $a = 2$, $A = \dots\dots$, $b = 3$, $B = 5$

c) $a = 2$, $A = 6$, $b = \dots\dots$, $B = 3$

d) $a = 2$, $A = 4$, $b = 3$, $B = \dots$

615. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{dla } x < 0 \\ dx + e & \text{dla } 0 \leq x < 1 \\ ax^2 + bx + c & \text{dla } 1 \leq x \end{cases}$$

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

a) $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = \dots$, $e = \dots$

b) $a = 1$, $b = 2$, $c = \dots$, $d = 4$, $e = \dots$

c) $a = 1$, $b = \dots$, $c = \dots$, $d = 4$, $e = 5$

d) $a = \dots$, $b = 7$, $c = 8$, $d = 9$, $e = \dots$

e) $a = 6$, $b = 7$, $c = \dots$, $d = \dots$, $e = 10$

f) $a = 6$, $b = \dots$, $c = 8$, $d = 9$, $e = \dots$

616. Czy funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = [x + \log_2 a] - [x]$ jest ciągła, jeżeli

a) $a = 1$

b) $a = 2$

c) $a = 6$

d) $a = 8$

617. Czy funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = [x + a] - [x + b]$ jest ciągła, jeżeli

a) $a = 1/2$, $b = 3/2$

b) $a = 1/3$, $b = -2/3$

c) $a = 1/4$, $b = 3/4$

d) $a = 1/5$, $b = -9/5$

618. Czy funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} |x^2 - 25| & \text{dla } x < a \\ 24 & \text{dla } a \leq x < b \\ |x^2 - 25| & \text{dla } b \leq x \end{cases}$$

jest ciągła, jeżeli

a) $a = -7$, $b = -5$

b) $a = -7$, $b = -1$

c) $a = -5$, $b = -3$

d) $a = -5$, $b = -1$

e) $a = -3$, $b = -1$

f) $a = -3$, $b = 1$

g) $a = -1$, $b = 1$

h) $a = -1$, $b = 3$

619. Podać wartości granic

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_{(\sqrt{37}-5)} x = \dots$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_{(\sqrt{37}-6)} x = \dots$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \log_{(\sqrt{37}-5)} x = \dots$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \log_{(\sqrt{37}-6)} x = \dots$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_{(\sqrt{37}-5)} x = \dots$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_{(\sqrt{37}-6)} x = \dots$

620. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = a \cdot \{2x\} + b \cdot \{2x\}^2 + c \cdot \{x\},$$

gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y .

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

a) $a = 1$, $b = \dots$, $c = \dots$

b) $a = \dots$, $b = 2$, $c = \dots$

c) $a = \dots$, $b = \dots$, $c = 3$

d) $a = 2$, $b = \dots$, $c = \dots$

e) $a = \dots$, $b = 3$, $c = \dots$

f) $a = \dots$, $b = \dots$, $c = 5$

621. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = a \cdot \{2x\} + b \cdot \{2x+1\} + c \cdot \{x\} + d \cdot \left\{x + \frac{1}{2}\right\},$$

gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y .

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

a) $a = 1$, $b = 2$, $c = \dots$, $d = \dots$

b) $a = \dots$, $b = 2$, $c = 3$, $d = \dots$

c) $a = \dots$, $b = \dots$, $c = 3$, $d = 4$

d) $a = 2$, $b = 3$, $c = \dots$, $d = \dots$

e) $a = \dots$, $b = 3$, $c = 6$, $d = \dots$

f) $a = \dots$, $b = \dots$, $c = 6$, $d = 6$

622. Podać wszystkie trzy pary parametrów (a, b) , dla których funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x < a \\ x^3 & \text{dla } a \leq x < b \\ x & \text{dla } b \leq x \end{cases}$$

jest ciągła.

$a = \dots$, $b = \dots$

$a = \dots$, $b = \dots$

$a = \dots$, $b = \dots$

623. Podać wszystkie sześć par parametrów (a, b) , dla których funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 6 & \text{dla } x < a \\ |x^2 - 10x + 15| & \text{dla } a \leq x < b \\ 6 & \text{dla } b \leq x \end{cases}$$

jest ciągła.

$a = \dots$, $b = \dots$

$a = \dots$, $b = \dots$

$a = \dots$, $b = \dots$

$a = \dots$, $b = \dots$

$a = \dots$, $b = \dots$

$a = \dots$, $b = \dots$

W każdym z osiemnastu poniższych zadań podaj wartość granicy funkcji (liczba rzeczywista) lub granicy niewłaściwej ($+\infty$ lub $-\infty$).

Wpisz literkę **R**, jeśli nie istnieje granica ani granica niewłaściwa.

Przypomnienie: Zapis $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y .

$$624. \quad \lim_{x \rightarrow 16^-} \{\log_4 x\} = \dots\dots$$

$$625. \quad \lim_{x \rightarrow 16^+} \{\log_4 x\} = \dots\dots$$

$$626. \quad \lim_{x \rightarrow 16^-} \{\log_8 x\} = \dots\dots$$

$$627. \quad \lim_{x \rightarrow 16^+} \{\log_8 x\} = \dots\dots$$

$$628. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = \dots\dots$$

$$629. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x = \dots\dots$$

$$630. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^x}\right)^{(x+4)^x} = \dots\dots$$

$$631. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^x}\right)^{(x+27)^x} = \dots\dots$$

$$632. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^x}\right)^{(x+256)^x} = \dots\dots$$

$$633. \quad \lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt[3]{x} - 4}{x - 64} = \dots\dots$$

$$634. \quad \lim_{x \rightarrow 64} \frac{x - 64}{\sqrt{x} - 8} = \dots\dots$$

$$635. \quad \lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt[3]{x} - 4}{\sqrt{x} - 8} = \dots\dots$$

$$636. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} 2^{2^{1/x}} = \dots\dots$$

$$637. \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} 2^{2^{1/x}} = \dots\dots$$

$$638. \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{2^{1/x}} = \dots\dots$$

$$639. \lim_{x \rightarrow 0^+} 2^{2^{1/x}} = \dots\dots$$

$$640. \lim_{x \rightarrow 0^-} 2^{2^{1/x}} = \dots\dots$$

$$641. \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{2^{2^{1/x}}} = \dots\dots$$

W każdym z dziewięciu poniższych zadań podaj wartość granicy ciągu (liczba rzeczywista) lub granicy niewłaściwej ($+\infty$ lub $-\infty$).

Wpisz literkę **R**, jeśli granica nie istnieje (tzn. gdy ciąg występujący pod znakiem granicy jest rozbieżny, ale nie jest to rozbieżność do $+\infty$ ani do $-\infty$).

$$642. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2(n+8)}{\log_2 n} = \dots\dots$$

$$643. \lim_{n \rightarrow \infty} (\log_2(n+8) - \log_2 n) = \dots\dots$$

$$644. \lim_{n \rightarrow \infty} \log_n(n+8) = \dots\dots$$

$$645. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2(8n+1)}{\log_2 n} = \dots\dots$$

$$646. \lim_{n \rightarrow \infty} (\log_2(8n+1) - \log_2 n) = \dots\dots$$

$$647. \lim_{n \rightarrow \infty} \log_n(8n+1) = \dots\dots$$

$$648. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2(n^8+1)}{\log_2 n} = \dots\dots$$

$$649. \lim_{n \rightarrow \infty} (\log_2(n^8+1) - \log_2 n) = \dots\dots$$

$$650. \lim_{n \rightarrow \infty} \log_n(n^8+1) = \dots\dots$$

651. Dana jest funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \sqrt[4]{x^2 + 16}.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{4}.$$

652. Dana jest funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \sqrt[8]{x^4 + 1}.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{2}.$$

653. Dana jest funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \sqrt[8]{x^2 + 10^8}.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{4000}.$$

654. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|,$$

gdzie $f(x) = \sqrt{x^2 + 37}$.

655. Niech funkcja $f: [8, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = \frac{1}{x}$.

Zdanie Z: Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [8, \infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq C \cdot |x - y|.$$

a) Dowieść, że **zdanie Z** jest prawdziwe dla $C = 1/60$.

b) Dowieść, że **zdanie Z** jest fałszywe dla $C = 1/80$.

656. Dla funkcji $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ określonej podanym wzorem wskazać odpowiednie liczby rzeczywiste dodatnie x, y i udowodnić nierówność

$$|f(x) - f(y)| > 100 \cdot |x - y|.$$

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = \frac{1}{x}$

657. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej x zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{8x + 7}{5x + \sqrt{x} + 8} \leq 6 \cdot C.$$

658. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{18x^6 + 19x^4 + 20}{21x^6 + 20x^2 + 19} \leq 10 \cdot C.$$

Rozwiązania zadań **605–658** znajdują się na liście **8r**.