

682. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+35)^{n^2} \cdot x^{5n}}{n^{n^2}}.$$

Rozwiązanie:

Stosujemy do danego w zadaniu szeregu potęgowego kryterium Cauchy'ego:

$$\sqrt[n]{\frac{(n+35)^{n^2} \cdot |x|^{5n}}{n^{n^2}}} = \frac{(n+35)^n \cdot |x|^5}{n^n} = \left(1 + \frac{35}{n}\right)^n \cdot |x|^5 \rightarrow e^{35} \cdot |x|^5,$$

gdzie ostatnia zbieżność ma miejsce przy $n \rightarrow +\infty$.

Szereg jest więc zbieżny, gdy $e^{35} \cdot |x|^5 < 1$, czyli $|x| < e^{-7}$, natomiast jest rozbieżny, gdy $e^{35} \cdot |x|^5 > 1$, czyli $|x| > e^{-7}$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg potęgowy ma promień zbieżności e^{-7} .

683. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{5n^2}}{\sqrt[n]{n} \cdot 5^{n^2}}.$$

Rozwiązanie:

Stosujemy kryterium Cauchy'ego do danego w zadaniu szeregu:

$$\sqrt[n]{\left| \frac{x^{5n^2}}{\sqrt[n]{n} \cdot 5^{n^2}} \right|} = \frac{|x|^{5n}}{\sqrt[n]{n} \cdot 5^n} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \cdot \left(\frac{|x|^5}{5}\right)^n = b_n$$

i zauważamy, że wobec $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ zachodzi zbieżność

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1.$$

Jeżeli $\frac{|x|^5}{5} < 1$, czyli

$$|x| < \sqrt[5]{5},$$

to $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 < 1$, skąd wynika, że dany w zadaniu szereg potęgowy jest zbieżny.

Jeżeli zaś $\frac{|x|^5}{5} > 1$, czyli

$$|x| > \sqrt[5]{5},$$

to $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty > 1$, skąd wynika, że szereg potęgowy jest rozbieżny.

Zatem szereg potęgowy ma promień zbieżności $\sqrt[5]{5}$ i pozostaje zbadać jego zachowanie na końcach przedziału zbieżności.

Dla $x = \sqrt[5]{5}$ szereg potęgowy przyjmuje postać

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$$

i jest rozbieżny jako szereg postaci $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, gdzie $p \leq 1$.

Natomiast dla $x = -\sqrt[5]{5}$ szereg przyjmuje postać

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

i w oczywisty sposób spełnia założenia kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych, jest więc zbieżny.

Odpowiedź: Przedziałem zbieżności szeregu potęgowego jest przedział

$$\left[-\sqrt[5]{5}, \sqrt[5]{5}\right).$$

684. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot 2^n \cdot x^{3n}}{n^n \cdot \binom{3n}{n}}.$$

Rozwiązanie:

Stosujemy kryterium d'Alemberta:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{(n+1)! \cdot 2^{n+1} \cdot x^{3n+3}}{(n+1)^{n+1} \cdot \binom{3n+3}{n+1}} \cdot \frac{n^n \cdot \binom{3n}{n}}{n! \cdot 2^n \cdot x^{3n}} \right| = \frac{(n+1) \cdot 2 \cdot |x|^3}{\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{(3n+3) \cdot (3n+2) \cdot (3n+1)}{(n+1) \cdot (2n+2) \cdot (2n+1)}} = \\ & = \frac{2 \cdot |x|^3 \cdot (n+1) \cdot (2n+2) \cdot (2n+1)}{\frac{(n+1)^n}{n^n} \cdot (3n+3) \cdot (3n+2) \cdot (3n+1)} = \frac{2 \cdot |x|^3 \cdot (n+1) \cdot 2 \cdot (2n+1)}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot 3 \cdot (3n+2) \cdot (3n+1)} \rightarrow \frac{8 \cdot |x|^3}{e \cdot 27} \end{aligned}$$

przy $n \rightarrow \infty$.

Zatem dany w zadaniu szereg potęgowy jest zbieżny, jeżeli

$$\frac{8 \cdot |x|^3}{e \cdot 27} < 1,$$

czyli

$$|x| < \frac{3\sqrt[3]{e}}{2},$$

a rozbieżny, jeżeli

$$\frac{8 \cdot |x|^3}{e \cdot 27} > 1,$$

czyli

$$|x| > \frac{3\sqrt[3]{e}}{2}.$$

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg potęgowy ma promień zbieżności $\frac{3\sqrt[3]{e}}{2}$.

685. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3) \cdot 3^n \cdot x^{3n}}{n^2 + 10}.$$

Rozwiązanie:

Korzystamy z kryterium d'Alemberta:

$$\left| \frac{(n+4) \cdot 3^{n+1} \cdot x^{3n+3}}{(n+1)^2 + 10} \cdot \frac{n^2 + 10}{(n+3) \cdot 3^n \cdot x^{3n}} \right| = \frac{(n+4) \cdot (n^2 + 10) \cdot 3 \cdot |x|^3}{((n+1)^2 + 10) \cdot (n+3)} \rightarrow 3 \cdot |x|^3.$$

Jeżeli $3 \cdot |x|^3 < 1$, czyli

$$|x| < \frac{1}{\sqrt[3]{3}},$$

to szereg potęgowy jest zbieżny.

Jeżeli zaś $3 \cdot |x|^3 > 1$, czyli

$$|x| > \frac{1}{\sqrt[3]{3}},$$

to szereg potęgowy jest rozbieżny.

Zatem szereg potęgowy ma promień zbieżności $1/\sqrt[3]{3}$ i pozostaje zbadać jego zachowanie na końcach przedziału zbieżności.

Dla $x = 1/\sqrt[3]{3}$ szereg przyjmuje postać

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^2+10}.$$

Udowadniamy jego rozbieżność korzystając z kryterium porównawczego:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^2+10} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+0}{n^2+10n^2} = \frac{1}{11} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Dla $x = -1/\sqrt[3]{3}$ szereg przyjmuje postać

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^2+10} \cdot (-1)^n.$$

Udowadniamy jego zbieżność korzystając z kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

W tym celu trzeba wykazać spełnianie trzech warunków:

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne.

Jest to oczywiste.

2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{n^2+10} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{10}{n^2}} = \frac{0}{1} = 0.$$

3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.

W tym celu trzeba udowodnić nierówność

$$\frac{n+3}{n^2+10} \geq \frac{n+4}{(n+1)^2+10}.$$

Przekształcając powyższą nierówność otrzymujemy kolejno:

$$\begin{aligned} (n+3) \cdot (n^2+2n+11) &\geq (n+4) \cdot (n^2+10) \\ n^3+2n^2+11n+3n^2+6n+33 &\geq n^3+10n+4n^2+40 \\ n^3+5n^2+17n+33 &\geq n^3+4n^2+10n+40 \end{aligned}$$

$$n^2 + 7n - 7 \geq 0$$

$$n^2 + 7(n-1) \geq 0,$$

co jest prawdziwe dla każdej liczby naturalnej n .

Odpowiedź: Przedziałem zbieżności szeregu potęgowego jest przedział

$$\left[-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \right).$$

686. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n} \cdot x^n}{(2n)!}.$$

Rozwiązanie:

Korzystamy z kryterium d'Alemberta (przy założeniu $x \neq 0$):

$$\begin{aligned} \left| \frac{(n+1)^{2n+2} \cdot x^{n+1}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{n^{2n} \cdot x^n} \right| &= \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} \cdot (n+1)^2 \cdot |x|}{(2n+2) \cdot (2n+1)} = \\ &= \left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right)^2 \cdot \frac{(n+1) \cdot |x|}{2 \cdot (2n+1)} \rightarrow \frac{e^2}{4} \cdot |x|. \end{aligned}$$

Jeżeli $\frac{e^2}{4} \cdot |x| < 1$, czyli

$$|x| < \frac{4}{e^2},$$

to szereg potęgowy jest zbieżny.

Jeżeli zaś $\frac{e^2}{4} \cdot |x| > 1$, czyli

$$|x| > \frac{4}{e^2},$$

to szereg potęgowy jest rozbieżny.

Odpowiedź: Promień zbieżności danego szeregu potęgowego jest równy $\frac{4}{e^2}$.

687. Podać przykład szeregu potęgowego, którego przedziałem zbieżności jest przedział $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Rozwiązanie:

Takim szeregiem jest na przykład szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot (-\sqrt{2})^n}.$$

Inny przykład to

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n \cdot (-2)^n}.$$

688. Podać przykład takiego szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ zbieżnego na całej prostej rzeczywistej, że

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 5 \text{ dla } x = 1 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 20 \text{ dla } x = 2.$$

Rozwiązanie:

Wystarczy przyjąć $a_2 = 5$ oraz $a_n = 0$ dla $n \neq 2$.

689. Podać przykład takiego szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ zbieżnego na całej prostej rzeczywistej, że

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 2 \text{ dla } x = 1 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 18 \text{ dla } x = 3.$$

Rozwiązanie:

Wystarczy przyjąć $a_2 = 2$ oraz $a_n = 0$ dla $n \neq 2$.

690. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot x^{n^2}}{n^{1000}}.$$

Rozwiązanie:

Stosując kryterium d'Alemberta otrzymujemy

$$\left| \frac{2^{n+1} \cdot x^{(n+1)^2}}{(n+1)^{1000}} \cdot \frac{n^{1000}}{2^n \cdot x^{n^2}} \right| = 2 \cdot |x|^{2n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1} \right)^{1000} \rightarrow \begin{cases} +\infty > 1 & \text{dla } |x| > 1 \\ 2 > 1 & \text{dla } |x| = 1 \\ 0 < 1 & \text{dla } |x| < 1 \end{cases}$$

Stąd wynika, że dany szereg jest zbieżny tylko dla $|x| < 1$.

Odpowiedź: Przedziałem zbieżności danego szeregu potęgowego jest przedział $(-1, 1)$.

691. Podać przykład takiego szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o promieniu zbieżności równym 2, że

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 4 \text{ dla } x = 1.$$

Rozwiązanie:

Wystarczy przyjąć $a_0 = 3$ oraz $a_n = 1/2^n$ dla $n \geq 1$.

Inny przykład: $a_n = 2/2^n$.