

1. Czy każda liczba naturalna podzielna przez $60!$ jest podzielna przez

- a) $30!$;
- b) $40!$;
- c) $49!$;
- d) $120!$?

2. Czy podana liczba jest sześcianem liczby całkowitej

- a) $12^{2014} \cdot 18^{2020}$;
- b) $12^{2013} \cdot 18^{2016}$;
- c) $12^{2012} \cdot 18^{2013}$;
- d) $12^{2011} \cdot 18^{2011}$?

3. Dla dowolnych liczb naturalnych m, n spełniających warunek $mn = d$ zachodzi nierówność $m + n \geq d$. Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

- a) $d = 5$;
- b) $d = 4$;
- c) $d = 11$;
- d) $d = 8$?

4. Czy prawdziwa jest równość

- a) $\text{NWW}(77!, 5^{18}) = 77!$;
- b) $\text{NWW}(44!, 5^{10}) = 44!$;
- c) $\text{NWW}(55!, 5^{13}) = 55!$;
- d) $\text{NWW}(66!, 5^{16}) = 66!$?

5. Czy każda liczba naturalna o sumie cyfr równej S jest kwadratem liczby całkowitej, jeżeli

- a) $S = 45$;
- b) $S = 48$;
- c) $S = 47$;
- d) $S = 49$?

6. Czy każda liczba naturalna o sumie cyfr równej S jest sześcianem liczby całkowitej, jeżeli

- a) $S = 49$;
- b) $S = 48$;
- c) $S = 45$;
- d) $S = 47$?

7. Wiadomo, że wśród następujących sześciu liczb

$$3465^2 - 2, \quad 3465^2 - 4, \quad 3465^2 - 8, \quad 3465^2 - 16, \quad 3465^2 - 32, \quad 3465^2 - 64$$

trzy są pierwsze, a trzy złożone. Czy wobec tego liczbą pierwszą jest

- a) $3465^2 - 2$;
- b) $3465^2 - 4$;
- c) $3465^2 - 32$;
- d) $3465^2 - 8$?

8. Każda 3-cyfrowa liczba naturalna o sumie cyfr podzielnej przez d jest podzielna przez d . Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

- a) $d = 27$;
- b) $d = 18$;
- c) $d = 15$;
- d) $d = 9$?

9. Każda 4-cyfrowa liczba naturalna o sumie cyfr podzielnej przez d jest podzielna przez d . Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

- a) $d = 27$;
- b) $d = 4$;
- c) $d = 3$;
- d) $d = 9$?

10. Każda liczba naturalna dająca przy dzieleniu przez d resztę $d - 1$ ma co najmniej jeden dzielnik pierwszy dający przy dzieleniu przez d resztę $d - 1$. Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

- a) $d = 6$;
- b) $d = 5$;
- c) $d = 3$;
- d) $d = 4$?

11. Podać największy wspólny dzielnik liczb

a)
 $\text{NWD}(23!, 24^3) = \dots\dots\dots$

b)
 $\text{NWD}(20!, 21^3) = \dots\dots\dots$

c)
 $\text{NWD}(21!, 22^3) = \dots\dots\dots$

d)
 $\text{NWD}(22!, 23^3) = \dots\dots\dots$

12. Dla podanej liczby d wskazać najmniejszą taką liczbę naturalną k , że dla dowolnych liczb naturalnych m, n zachodzi wynikanie:

$$d^k | mn \Rightarrow (d^3 | m \vee d^4 | n) .$$

Napisać **NIE**, gdy taka liczba k nie istnieje.

a)
 $d = 9, \quad k = \dots\dots\dots$

b)
 $d = 10, \quad k = \dots\dots\dots$

c)
 $d = 11, \quad k = \dots\dots\dots$

d)
 $d = 8, \quad k = \dots\dots\dots$

13. Dla podanej liczby n wskazać największą liczbę całkowitą nieujemną k , dla której liczba n jest podzielna przez 4^k .

a)
 $n = 1112854711^{16}, \quad k = \dots\dots\dots$

b)
 $n = 285470024^{21}, \quad k = \dots\dots\dots$

c)
 $n = 1112854710^{25}, \quad k = \dots\dots\dots$

d)
 $n = 285470004^{19}, \quad k = \dots\dots\dots$

14. Wypisać w kolejności rosnącej wszystkie takie liczby naturalne n , że

- a) $30 < n < 40$, a liczba n^n jest
piątą potęgą liczby całkowitej
- b) $20 < n < 30$, a liczba n^n jest
kwadratem liczby całkowitej
- c) $30 < n < 40$, a liczba n^n jest
czwartą potęgą liczby całkowitej
- d) $20 < n < 30$, a liczba n^n jest
sześcianiem liczby całkowitej

15. Rozważamy ciąg 3, 6, 12, 15, 21, 24, 30, 33, 39, 51, ..., w którym każdy kolejny wyraz powstaje z poprzedniego przez dodanie sumy cyfr. Wiadomo, że dla każdej pary poniższych liczb a , b w ciągu tym występuje dokładnie jedna liczba naturalna n spełniająca nierówność $a \leq n \leq b$. Wskazać tę liczbę.

- a)
 $a = 1305$, $b = 1310$, $n = \dots$
- b)
 $a = 4005$, $b = 4010$, $n = \dots$
- c)
 $a = 2005$, $b = 2010$, $n = \dots$
- d)
 $a = 3005$, $b = 3010$, $n = \dots$