

1. Czy istnieją takie liczby naturalne $m, n > 1$, że liczba $\log_2 m$ jest większa o $p\%$ od liczby $\log_2 n$, jeżeli

- a) $p = 100$;
- b) $p = 25$;
- c) $p = 37$;
- d) $p = 350$?

2. Czy w dowolny czworokąt wypukły o bokach podanej długości (z zachowaniem kolejności) można wpisać okrąg

- a) 8, 3, 7, 4;
- b) 8, 7, 1, 4;
- c) 8, 7, 3, 4;
- d) 8, 8, 4, 4?

3. Czy w dowolnym czworokącie wypukłym o bokach podanej długości (z zachowaniem kolejności) przekątne są prostopadłe

- a) 8, 8, 4, 4;
- b) 8, 7, 1, 4;
- c) 8, 7, 3, 4;
- d) 8, 3, 7, 4?

4. Czy równość

$$\cos 6\alpha = \sin 24\alpha$$

jest prawdziwa dla

- a) $\alpha = 6^\circ$;
- b) $\alpha = 3^\circ$;
- c) $\alpha = 4^\circ$;
- d) $\alpha = 5^\circ$?

5. Czy równość

$$[\log_3 a] = [\log_3 b]$$

jest prawdziwa dla podanych liczb a, b ?

Uwaga: $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x .

- a) $a = 10, \quad b = 20$;
- b) $a = 30, \quad b = 80$;
- c) $a = 20, \quad b = 30$;
- d) $a = 50, \quad b = 100$.

6. Czy równość

$$\{\log_2 a\} = \{\log_2 b\}$$

jest prawdziwa dla podanych liczb a, b ?

Uwaga: $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x .

- a) $a = 50, \quad b = 100$;
- b) $a = 30, \quad b = 80$;
- c) $a = 10, \quad b = 20$;
- d) $a = 20, \quad b = 30$.

7. Czy nierówność

$$\binom{n}{4} < (n-3) \cdot (n-2) \cdot (n-1)$$

jest prawdziwa dla

- a) $n = 22$;
- b) $n = 23$;
- c) $n = 25$;
- d) $n = 24$?

8. Czy nierówność

$$\sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \cdot \cos 8\alpha \cdot \cos 16\alpha \cdot \cos 32\alpha > 0$$

jest prawdziwa dla

- a) $\alpha = 4^\circ$;
- b) $\alpha = 3^\circ$;
- c) $\alpha = 2^\circ$;
- d) $\alpha = 1^\circ$?

9. Dany jest n -kąt foremny $A_1A_2A_3\dots A_n$. Czy trójkąt $A_1A_8A_{11}$ jest prostokątny, jeżeli

- a) $n = 22$;
- b) $n = 14$;
- c) $n = 12$;
- d) $n = 20$?

10. Dany jest n -kąt foremny $A_1A_2A_3\dots A_n$. Czy w trójkącie $A_1A_8A_{11}$ co najmniej jeden kąt ma miarę 60° , jeżeli

- a) $n = 30$;
- b) $n = 24$;
- c) $n = 15$;
- d) $n = 21$?

11. Dany jest postęp geometryczny trójwyrazowy o ilorazie q . Czy dla podanej liczby q wyrazy tego postępu po odpowiedniej zmianie kolejności tworzą postęp arytmetyczny trójwyrazowy?

Przypomnienie: Przyjmujemy, że wyrazy postępu geometrycznego są różne od zera.

- a) $q = -3$;
- b) $q = -1/2$;
- c) $q = 1/2$;
- d) $q = -2$.

12. Dla podanej liczby s podać największą liczbę całkowitą dodatnią d o następującej własności: Każda liczba całkowita dodatnia o sumie cyfr równej s jest podzielna przez d .

a) $s = 16, \quad d = \dots\dots\dots$

b) $s = 17, \quad d = \dots\dots\dots$

c) $s = 18, \quad d = \dots\dots\dots$

d) $s = 15, \quad d = \dots\dots\dots$

13. Dla podanej liczby k podać największą liczbę całkowitą dodatnią d o następującej własności: Każda liczba całkowita dodatnia o dwucyfrowej końcówce równej k jest podzielna przez d .

a) $k = 16, \quad d = \dots\dots\dots$

b) $k = 18, \quad d = \dots\dots\dots$

c) $k = 15, \quad d = \dots\dots\dots$

d) $k = 17, \quad d = \dots\dots\dots$

14. Dla podanej liczby naturalnej n podać największą liczbę naturalną k , dla której prawdziwe jest następujące zdanie: Dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich a, b , jeżeli iloczyn ab jest podzielny przez n , to co najmniej jeden z czynników a, b jest podzielny przez k .

a) $n = 5^5 \cdot 101, \quad k = \dots\dots\dots$

b) $n = 2^9 \cdot 29, \quad k = \dots\dots\dots$

c) $n = 3^5 \cdot 29, \quad k = \dots\dots\dots$

d) $n = 3^7 \cdot 101, \quad k = \dots\dots\dots$

15. Zapisać zbiór rozwiązań podanej nierówności w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów (nie używać różnicy zbiorów).

a)

$$(x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) > 0, \quad \dots\dots\dots$$

b)

$$(x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3)^2 > 0, \quad \dots\dots\dots$$

c)

$$(x-1)^2 \cdot (x-2) \cdot (x-3) > 0, \quad \dots\dots\dots$$

d)

$$(x-1) \cdot (x-2)^2 \cdot (x-3) > 0, \quad \dots\dots\dots$$

16. Zapisać zbiór rozwiązań podanej nierówności w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów (nie używać różnicy zbiorów).

a)

$$(|\log_2 x| - 2)^5 > 1, \quad \dots\dots\dots$$

b)

$$(|\log_2 x| - 1)^3 < 1, \quad \dots\dots\dots$$

c)

$$(|\log_2 x| - 1)^2 < 1, \quad \dots\dots\dots$$

d)

$$(|\log_2 x| - 2)^4 > 1, \quad \dots\dots\dots$$

17. (3 punkty) W okrąg o promieniu R wpisano taki czworokąt $ABCD$, że $AB = BC = a$ oraz $CD = DA = b$. Podać wzór na R w zależności od a i b . Wzór nie może zawierać funkcji trygonometrycznych.

$$R = \dots\dots\dots$$

18. (7 punktów) W okrąg o promieniu R wpisano taki sześciokąt $ABCDEF$, że $AB = BC = CD = a$ oraz $DE = EF = FA = b$. Podać wzór (**bez funkcji trygonometrycznych**) na R w zależności od a i b . Jeśli użyjesz funkcji trygonometrycznych, możesz otrzymać **3 punkty**.

$$R = \dots\dots\dots$$