

Podzielność, cechy podzielności, liczby pierwsze, największy wspólny dzielnik, najmniejsza wspólna wielokrotność.

W dniu 3 października 2013 r. omawiamy test kwalifikacyjny.

Uwaga: Przyjmujemy, że 0 nie jest liczbą naturalną, tzn. liczby naturalne są to liczby całkowite dodatnie.

Kółeczkiem oznaczone są proste ćwiczenia lub zadania podobne do wcześniejszych zadań – bez wyraźnej prośby studentów nie będą omawiane na zajęciach poza grupą ME0.

Gwiazdką oznaczone są zadania trudniejsze lub wykraczające poza zasadniczą część materiału – ich znajomość może być potrzebna dla uzyskania wyższych ocen.

1. Dane są liczby naturalne m, n . Wówczas dla dowolnej liczby naturalnej k , liczba k jest podzielna jednocześnie przez m oraz n wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzielna przez

Ponadto, jeżeli, to dla dowolnej liczby naturalnej k , liczba k jest podzielna jednocześnie przez m oraz n wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzielna przez mn .

2°. W liczbie $3?20000001?5$ wpisać w miejsce obu znaków zapytania taką samą cyfrę tak, aby otrzymać liczbę podzielną przez 75. Podać wszystkie rozwiązania.

3°. W liczbie $3120000001??$ wpisać w miejsce znaków zapytania takie cyfry (mogą być różne), aby otrzymać liczbę dającą przy dzieleniu przez 72 resztę 5. Podać wszystkie rozwiązania.

4. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne d , dla których prawdziwa jest następująca cecha podzielności przez d :

Dla dowolnej liczby naturalnej k , liczba k jest podzielna przez d wtedy i tylko wtedy, gdy liczba utworzona przez dwie ostatnie cyfry liczby k jest podzielna przez d .

5. Jakie reszty może dawać kwadrat liczby całkowitej przy dzieleniu przez 3? Przez 8? Przez 5?

6. Jakie reszty może dawać sześcián liczby całkowitej przy dzieleniu przez 7? Przez 9?

7. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne $n > 1$, dla których liczba $n^2 - 1$ jest pierwsza.

8. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p , dla których liczba $3p + 1$ jest pierwsza.

9. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p , dla których liczba $p^2 + 2$ jest pierwsza.

10. Czy istnieją liczby naturalne m, n spełniające równanie

$$6^m = 12^n ?$$

11. Czy istnieją liczby naturalne m, n, k spełniające równanie

$$6^m \cdot 12^n = 18^k ?$$

12. Czy istnieją liczby naturalne m, n, k spełniające równanie

$$18^m \cdot 24^n = 12^k ?$$

13. Wskazać takie liczby naturalne m, n , że

$$m^3 n^4 = 2^{11} \cdot 3^7 \cdot 5^{13}.$$

14°. Która liczba jest większa, $2^{23} \cdot 18^{10}$ czy $12^{15} \cdot 3^7$?

15°. Ile zer końcowych ma liczba $33!$?

16. Ile zer końcowych ma liczba $1000!$?

17. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne d o następującej własności: Dla dowolnych liczb naturalnych m, n , jeżeli iloczyn mn jest podzielny przez 7, to co najmniej jedna z liczb m, n jest podzielna przez d .

18. To samo z liczbą 24 zamiast 7.

19°. Obliczyć NWD($24!$, 24^{24}).

20°. Obliczyć NWW(12^{12} , 18^{18}).

21. Dowieść, że liczba naturalna o sumie cyfr równej 47 nie może być ani kwadratem, ani sześcianem liczby całkowitej.

22. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $n^2 - n$ jest parzysta, liczba $n^3 - n$ jest podzielna przez 6, a liczba $n^5 - n$ jest podzielna przez 30.

Wskazówka: $n^5 - n = (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) + \text{coś}$.

23°. Niech $a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^9$, $b = 2^6 \cdot 3^{11} \cdot 5^5$, $c = 2^{10} \cdot 3^3 \cdot 7^2$.

Obliczyć NWD(a, b, c) oraz NWW(a, b, c).

24°. Niech $a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 6^9$, $b = 2^6 \cdot 3^{11} \cdot 4^5$, $c = 2^{10} \cdot 3^3 \cdot 10^2$.

Obliczyć NWD(a, b, c) oraz NWW(a, b, c).

25*. Na wyspach Bergamutach podobno jest kot w butach i podobno używają tam tylko liczb naturalnych dających przy dzieleniu przez 3 resztę 1. To ograniczenie nie pozwala na wykonywanie dodawania, ale mnożenie nie sprawia kłopotu. Można też bez problemu mówić o podzielności liczb. Liczba 4 jest uważana za liczbę pierwszą, bo oprócz

1 i 4 nie ma żadnego innego dzielnika spośród liczb używanych na Bergamutach. Które spośród liczb mniejszych od 30 są na Bergamutach uważane za pierwsze, a które za złożone? Czy na Bergamutach prawdziwe jest twierdzenie o jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze?

Czy na Bergamutach prawdziwa jest następująca charakteryzacja wspólnych dzielników liczb m i n :

Liczba d jest wspólnym dzielnikiem liczb m i n wtedy i tylko wtedy, gdy d jest dzielnikiem liczby $\text{NWD}(m, n)$.

Czy na Bergamutach prawdziwa jest następująca charakteryzacja wspólnych wielokrotności liczb m i n :

Liczba w jest wspólną wielokrotnością liczb m i n wtedy i tylko wtedy, gdy w jest wielokrotnością liczby $\text{NWW}(m, n)$.

Czy na Bergamutach prawdziwe są wzory:

- a) $(\text{NWD}(m, n))^2 = \text{NWD}(m^2, n^2)$
- b) $\text{NWD}(a, b, c) = \text{NWD}(\text{NWD}(a, b), c)$

26. Połączyć podane warunki w grupy warunków równoważnych dla dowolnej liczby naturalnej n .

- a) liczba n jest nieparzysta
- b) liczba n jest względnie pierwsza z 6
- c) jedna z liczb $n-1$, $n+1$ jest podzielna przez 4
- d) jedna z liczb $n-1$, $n+1$ jest podzielna przez 6
- e) jedna z liczb $n-1$, $n+1$ jest podzielna przez 8
- f) liczba n^2-1 jest podzielna przez 4
- g) liczba n^2-1 jest podzielna przez 8
- h) liczba n^2-1 jest podzielna przez 12
- i) liczba n^2-1 jest podzielna przez 16
- j) liczba n^2-1 jest podzielna przez 24

27. Dowieść, że w ciągu 1, 2, 4, 8, 16, 23, 28, ..., w którym każdy kolejny wyraz powstaje z poprzedniego przez dodanie sumy cyfr, nie występuje liczba 2013.

28. Niech $n!! = n(n-2)(n-4)\dots$ będzie iloczynem liczb naturalnych nie większych od n i będących tej samej parzystości, co n . Ile zer końcowych mają liczby $34!!$ oraz $35!!$?

29. Obliczyć

- a) $\text{NWD}(254678914^{37}, 10^{43})$
- b) $\text{NWD}(472851364^{43}, 2^{50})$
- c) $\text{NWD}(100000008^{25}, 12^{16})$
- d) $\text{NWD}(100000011^{44}, 300^{300})$
- e) $\text{NWD}(200000004^{31}, 24^{24})$
- f) $\text{NWD}(18465210275^{44}, 10^{47})$

- g) $\text{NWD}(7771428426328^{60}, 14^{37})$
 h) $\text{NWD}(1122334455666^{50}, 44^{37})$
 i) $\text{NWD}(12468945716272^{29}, 14^{17}, 330^{23})$
 j) $\text{NWD}(1352263965789126^{44}, 26^{19}, 39^{22})$

30. Wskazać najmniejszą (o ile taka w ogóle istnieje) liczbę naturalną k , dla której podane wyrażenie jest prawdziwe dla dowolnych liczb naturalnych m, n i (ewentualnie) r .

- a) $3^k | mn \Rightarrow (3^3 | m \vee 3^3 | n)$
 b) $5^k | mn \Rightarrow (5^2 | m \vee 5^7 | n)$
 c) $7^k | mnr \Rightarrow (7^5 | m \vee 7^3 | n \vee 7^{12} | r)$
 d) $4^k | mnr \Rightarrow (4^5 | m \vee 4^3 | n \vee 4^{12} | r)$
 e) $6^k | mnr \Rightarrow (6^5 | m \vee 6^3 | n \vee 6^{12} | r)$

31. Uporządkować podane liczby w kolejności rosnącej

$$\begin{aligned} a &= 90 \cdot 60^9 \\ b &= 15^3 \cdot 120^7 \\ c &= 2^7 \cdot 30^{11} \\ d &= 60^{10} \\ e &= 40^6 \cdot 45^5 \\ f &= 72^6 \cdot 5^{10} \\ g &= 5^{11} \cdot 50000^2 \end{aligned}$$

32. Pani napisała na tablicy pewną liczbę naturalną. Troje uczniów spostrzegło i wypowiedziało pewne własności napisanej liczby. Niestety, tylko dwóch uczniów podało własności poprawne, a trzeci uczeń się pomylił. Który uczeń popełnił błąd?

Wersja I

Pankracy: Napisana liczba jest kwadratem liczby całkowitej.
 Serwacy: Suma cyfr napisanej liczby jest równa 38.
 Bonifacy: Napisana liczba przy dzieleniu przez 9 daje resztę 2.

Wersja II

Pankracy: Napisana liczba jest kwadratem liczby całkowitej.
 Serwacy: Suma cyfr napisanej liczby jest równa 32.
 Bonifacy: Napisana liczba przy dzieleniu przez 9 daje resztę 7.

Wersja III

Pankracy: Napisana liczba jest kwadratem liczby całkowitej.
 Serwacy: Suma cyfr napisanej liczby jest równa 19.
 Bonifacy: Napisana liczba przy dzieleniu przez 9 daje resztę 3.

Wersja IV

Pankracy: Napisana liczba jest kwadratem liczby całkowitej.
 Serwacy: Suma cyfr napisanej liczby jest równa 2004.
 Bonifacy: Napisana liczba kończy się cyframi 2005.

Wersja V

Pankracy: Napisana liczba jest sześcianem liczby całkowitej.

Serwacy: Napisana liczba kończy się cyframi 444.

Bonifacy: Napisana liczba jest nieparzysta.

Wersja VI

Pankracy: Napisana liczba jest sześcianem liczby całkowitej.

Serwacy: Napisana liczba kończy się cyframi 2222.

Bonifacy: Suma cyfr napisanej liczby jest równa 43.

33. W miejsce kropek wstawić największą/najmniejszą (cokolwiek jest sensowne) liczbę, przy której podana implikacja jest prawdziwa dla dowolnej liczby naturalnej n

a) $24|n^2 \Rightarrow \dots\dots|n^2$

b) $18|n^3 \Rightarrow \dots\dots|n^3$

c) $60|n^5 \Rightarrow \dots\dots|n^5$

d) $n^2|24 \Rightarrow n^2|\dots\dots$

e) $n^3|10! \Rightarrow n^3|\dots\dots$

f) $54|n^2 \Rightarrow \dots\dots|n^3$

g) $n^5|12^8 \Rightarrow n|\dots\dots$

h) $8^8|n^{10} \Rightarrow \dots\dots|n$

Zadania powtórkowe do kolokwium nr 1 (21 października 2013)

Uwaga: To są zadania do samodzielnej powtórki - na zajęciach rozwiążemy tylko część zadań z tej listy. Proszę umieć wskazać zadania, które wymagają omówienia.

Kolokwium będzie zakładało umiejętność rozwiązywania zadań 1-73 oraz umiejętność samodzielnego myślenia.

34. Dla dowolnej liczby naturalnej n liczba n^2 jest podzielna przez 6 wtedy i tylko wtedy, gdy liczba n^2 jest podzielna przez d . Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

a) $d = 4$;

b) $d = 36$;

c) $d = 12$;

d) $d = 24$?

35. Spośród dowolnych k różnych liczb naturalnych można wybrać takie 3 różne liczby a, b, c , że obie liczby $a-b$ oraz $b-c$ są podzielne przez n . Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

a) $k = 9, n = 5$;

b) $k = 30, n = 15$;

c) $k = 11, n = 7$;

d) $k = 21, n = 10$?

36. Czy podaną liczbę można przedstawić w postaci $m^2 \cdot n^3$, gdzie m, n są liczbami naturalnymi

- a) $6 \cdot 8^7$;
- b) $6 \cdot 24^7$;
- c) $6 \cdot 9^7$;
- d) $6 \cdot 12^7$?

37. Czy podaną liczbę można przedstawić w postaci $m^2 \cdot n^3$, gdzie m, n są liczbami naturalnymi

- a) $(10!)^{10} \cdot 17$;
- b) $(13!)^{13} \cdot 11$;
- c) $(11!)^{11} \cdot 15$;
- d) $(12!)^{12} \cdot 13$?

38. Czy istnieje taka liczba naturalna n , że

- a) $n^2 = 4^9 \cdot 3^{28} \cdot 6^{12}$;
- b) $n^5 = 4^9 \cdot 3^{28} \cdot 6^{12}$;
- c) $n^3 = 4^9 \cdot 3^{28} \cdot 6^{12}$;
- d) $n^4 = 4^9 \cdot 3^{28} \cdot 6^{12}$?

39. Czy podana liczba jest podzielna przez 2^{111}

- a) 6256544265423562514⁷⁰;
- b) 1547578087823541024⁴⁰;
- c) 4777247245432274100⁶⁰;
- d) 8759859808595634036⁵⁰?

40. Niech $S(n)$ oznacza sumę cyfr liczby n . Czy dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $n - S(n)$ jest podzielna przez

- a) 3;
- b) 9;
- c) 4;
- d) 5?

41. Czy dla dowolnych liczb naturalnych a, b

- a) liczba $\text{NWW}(a, b)$ jest podzielna przez $\text{NWD}(a, b)$;
- b) liczba $\text{NWW}(a, b)$ jest podzielna przez b ;
- c) liczba $\text{NWD}(a, b)$ jest podzielna przez $\text{NWW}(a, b)$;
- d) liczba $\text{NWD}(a, b)$ jest podzielna przez a ?

48. Dowolna liczba naturalna daje przy dzieleniu przez d taką samą resztę, jaką daje przy dzieleniu przez d jej końcówka 3-cyfrowa. Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

- a) $d = 12$;
- b) $d = 40$;
- c) $d = 16$;
- d) $d = 25$?

49. Czy istnieje taka liczba pierwsza p , że liczbą pierwszą jest również liczba

- a) $p^2 + 2$;
- b) $p^2 + 26$;
- c) $p^2 + 8$;
- d) $p^2 + 14$?

50. Dla dowolnych liczb naturalnych m, n , jeżeli liczba m^n (m do potęgi n) jest podzielna przez d , to co najmniej jedna z liczb m, n jest podzielna przez d . Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

- a) $d = 9$;
- b) $d = 12$;
- c) $d = 10$;
- d) $d = 11$?

51. Dla dowolnych liczb naturalnych k, m, n , jeżeli iloczyn kmn jest podzielny przez d^2 , to co najmniej jedna z liczb k, m, n jest podzielna przez d . Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

- a) $d = 8$;
- b) $d = 11$;
- c) $d = 9$;
- d) $d = 10$?

52. Czy o liczbie m^n , gdzie m, n są liczbami całkowitymi dodatnimi, możemy wnioskować, że jest ona kwadratem liczby naturalnej, jeżeli wiemy, że

- a) liczba m jest kwadratem liczby naturalnej;
- b) liczba n jest parzysta;
- c) liczba n jest kwadratem liczby naturalnej;
- d) liczba m jest parzysta?

53. Czy o liczbie m^n , gdzie m, n są liczbami całkowitymi dodatnimi, możemy wnioskować, że jest ona liczbą parzystą, jeżeli wiemy, że

- a) liczba m jest kwadratem liczby naturalnej;
- b) liczba n jest parzysta;
- c) liczba n jest kwadratem liczby naturalnej;
- d) liczba m jest parzysta?

54. Czy istnieją takie liczby całkowite dodatnie m, n , że

- a) $n = 2 \cdot \text{NWD}(m, n)$ oraz $m = 3 \cdot \text{NWD}(m, n)$;
- b) $n = 10 \cdot \text{NWD}(m, n)$ oraz $m = 21 \cdot \text{NWD}(m, n)$;
- c) $n = 4 \cdot \text{NWD}(m, n)$ oraz $m = 6 \cdot \text{NWD}(m, n)$;
- d) $n = 6 \cdot \text{NWD}(m, n)$ oraz $m = 15 \cdot \text{NWD}(m, n)$?

55. Czy istnieją takie liczby całkowite dodatnie m, n , że

- a) $\text{NWW}(m, n) = 2 \cdot n = 3 \cdot m$;
- b) $\text{NWW}(m, n) = 10 \cdot n = 21 \cdot m$;
- c) $\text{NWW}(m, n) = 4 \cdot n = 6 \cdot m$;
- d) $\text{NWW}(m, n) = 6 \cdot n = 15 \cdot m$?

56. Czy dla dowolnej liczby pierwszej $p \geq 2011$ podana liczba jest podzielna przez 3

- a) $p^2 + 2015$;
- b) $p^2 + 2018$;
- c) $p^2 + 2016$;
- d) $p^2 + 2017$?

57. Czy dla dowolnej liczby pierwszej $p \geq 2011$ podana liczba jest **niepodzielna** przez 5

- a) $p^2 + 2015$;
- b) $p^2 + 2018$;
- c) $p^2 + 2016$;
- d) $p^2 + 2017$?

58. Czy podana liczba jest czwartą potęgą liczby całkowitej

- a) 9^{10} ;
- b) 16^{17} ;
- c) 11^{12} ;
- d) 13^{14} ?

59. Iloczyn mn liczb naturalnych m, n jest podzielny przez $2^5 \cdot 3^3$. Czy stąd wynika, że co najmniej jedna z liczb m, n jest podzielna przez

- a) 4;
- b) 9;
- c) 6;
- d) 8?

60. Iloczyn kmn liczb naturalnych k, m, n jest podzielny przez $2^5 \cdot 3^3$. Czy stąd wynika, że co najmniej jeden z iloczynów km, mn, nk jest podzielny przez

- a) 6;
- b) 36;
- c) 16;
- d) 27?

61. Czy istnieje liczba naturalna o sumie cyfr (w zapisie dziesiętnym) równej 2013, podzielna przez

- a) 8;
- b) 12;
- c) 9;
- d) 10?

62. Czy podana liczba jest szóstą potęgą liczby całkowitej

- a) 25^9 ;
- b) 49^{12} ;
- c) 27^{10} ;
- d) 36^{11} ?

63. Dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich m, n , jeżeli iloczyn mn jest podzielny przez d , to co najmniej jeden z czynników m, n jest podzielny przez d . Czy powyższe zdanie jest prawdziwe, jeżeli

- a) $d = 26$;
- b) $d = 32$;
- c) $d = 27$;
- d) $d = 31$?

64. Dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich m, n , jeżeli iloczyn mn jest podzielny przez d^2 , to co najmniej jeden z czynników m, n jest podzielny przez d . Czy powyższe zdanie jest prawdziwe, jeżeli

- a) $d = 26$;
- b) $d = 32$;
- c) $d = 27$;
- d) $d = 31$?

65. Podać największy wspólny dzielnik i najmniejszą wspólną wielokrotność liczb a i b

- a) $a = 12^{18}, b = 18^{12}$
- b) $a = 11!, b = 12$,
- c) $a = 4^{20} \cdot 6^{15}, b = 4^{15} \cdot 6^{20}$
- d) $a = 10!, b = 11$

66. Podać największy wspólny dzielnik liczb

- a) $\text{NWD}(52714014^8, 2^{13}) = \dots\dots\dots$
- b) $\text{NWD}(11223344^8, 22446688^{13}) = \dots\dots\dots$
- c) $\text{NWD}(80000025^8, 30^{13}) = \dots\dots\dots$
- d) $\text{NWD}(4852000017^8, 10^{11}, 21^{14}) = \dots\dots\dots$

67. Podać NWD i NWW

- a) $\text{NWD}(60^{60}, 90^{90}) = \dots\dots\dots$
- b) $\text{NWW}(1133^{2266}, 2266^{1133}) = \dots\dots\dots$
- c) $\text{NWW}(60^{60}, 90^{90}) = \dots\dots\dots$
- d) $\text{NWD}(1133^{2266}, 2266^{1133}) = \dots\dots\dots$

68. Podać liczbę zer końcowych danej liczby

- a) $2008571939215^{50} \cdot 2008571939032^{22} \dots\dots\dots$
- b) $2008571939125^{20} \cdot 2008571939214^{55} \dots\dots\dots$
- c) $2008571939025^{40} \cdot 2008571939028^{33} \dots\dots\dots$
- d) $2008571939350^{30} \cdot 2008571939122^{44} \dots\dots\dots$

69. Dana jest liczba naturalna n . Niech D będzie zbiorem wszystkich dzielników naturalnych liczby n , a W zbiorem jej wszystkich wielokrotności. Napisz, czemu jest równa podana liczba (możesz też napisać *nie istnieje*, jeśli uważasz, że podana liczba nie istnieje).

- a) Największy wspólny dzielnik wszystkich liczb ze zbioru D
- b) Najmniejsza wspólna wielokrotność wszystkich liczb ze zbioru W
- c) Najmniejsza wspólna wielokrotność wszystkich liczb ze zbioru D
- d) Największy wspólny dzielnik wszystkich liczb ze zbioru W

70. Dla podanej liczby naturalnej n wskazać liczbę naturalną $d < 100$, która jest dzielnikiem liczby n , a ponadto jest liczbą złożoną. Liczba n jest dziesięciocyfrowa, w jej zapisie dziesiętnym występuje 7 zer.

- a) $n = 1000000017$, $d = \dots$
- b) $n = 1000000028$, $d = \dots$
- c) $n = 1000000038$, $d = \dots$
- d) $n = 1000000065$, $d = \dots$

71. Dla podanej liczby naturalnej n wskazać największą liczbę naturalną k , dla której liczba n jest podzielna przez 12^k .

- a) $n = 8^8 \cdot 9^9$, $k = \dots$
- b) $n = 16^{16} \cdot 18^{18}$, $k = \dots$
- c) $n = 16^{16} \cdot 9^9$, $k = \dots$
- d) $n = 8^8 \cdot 18^{18}$, $k = \dots$

72. Podać największy wspólny dzielnik i najmniejszą wspólną wielokrotność liczb

- a) $\text{NWD}(140!, 210!) = \dots$
- b) $\text{NWW}(125!, 145!, 150!) = \dots$
- c) $\text{NWW}(140!, 210!) = \dots$
- d) $\text{NWD}(125!, 145!, 150!) = \dots$

73. Podać największy wspólny dzielnik liczb

- a) $\text{NWD}(30!, 31^2) = \dots$
- b) $\text{NWD}(33!, 34^2) = \dots$
- c) $\text{NWD}(31!, 32^2) = \dots$
- d) $\text{NWD}(32!, 33^2) = \dots$