

Wzory skróconego mnożenia, procenty, postęp arytmetyczny i geometryczny. Wartość bezwzględna, potęgowanie i pierwiastkowanie - rozwiązywanie równań i nierówności. Szacowanie wyrażeń.

W dniu 23/24 października 2013 r. omawiamy kolokwium nr 1.

74* Dowieść, że iloczyn dowolnych czterech kolejnych liczb naturalnych powiększony o jeden jest kwadratem liczby całkowitej.

75⁰ Uporządkować podane liczby w kolejności rosnącej. Nie używać kalkulatora!!!

$$\begin{aligned} a &= 3 \\ b &= \sqrt{7 + \sqrt{10}} \\ c &= \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} \\ d &= \sqrt{10} \\ e &= \sqrt{2} + \sqrt{3} \\ f &= \sqrt{5 + 3\sqrt{2}} \end{aligned}$$

76⁰ Uprościć wyrażenia

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{1}{5 - 2\sqrt{6}} + 2\sqrt{6} \\ \text{b)} \quad & \sqrt{(1 - \sqrt{2})^6} \\ \text{c)} \quad & (2^{2^{2007}} - 1) \cdot (2^{2^{2007}} + 1) \\ \text{d)} \quad & (3^{669} - 1) \cdot (9^{669} + 3^{669} + 1) \\ \text{e)} \quad & \frac{2^{2007} + 1}{2^{669} + 1} \end{aligned}$$

77. Uzupełnić wzory skróconego mnożenia. Kropki występujące po lewej stronie równości zastąpić pojedynczym znakiem.

$$\begin{aligned} \text{a)}^0 \quad & (x+2)^2 = x^2 + \dots \\ \text{b)} \quad & a^3 + b^3 = (a+b) \cdot \dots \\ \text{c)} \quad & a^3 - b^3 = (a-b) \cdot \dots \\ \text{d)} \quad & a^3 \dots b^3 = (a^2 + ab + b^2) \cdot \dots \\ \text{e)} \quad & a^4 \dots b^4 = (a+b) \cdot \dots \\ \text{f)} \quad & a^4 \dots b^4 = (a-b) \cdot \dots \\ \text{g)} \quad & a^5 \dots b^5 = (a+b) \cdot \dots \\ \text{h)} \quad & a^5 \dots b^5 = (a-b) \cdot \dots \\ \text{i)}^0 \quad & (a+b)^3 = a^3 + 3 \dots \\ \text{j)}^0 \quad & (a-b)^4 = a^4 - \dots \end{aligned}$$

$$\mathbf{k)}^0 (a-b)^5 = a^5 - \dots$$

$$\mathbf{l)} a^n - b^n = (a-b) \cdot \dots$$

$$\mathbf{m)} a^n + b^n = (a+b) \cdot \dots - \text{dla których } n ?$$

$$\mathbf{n)} a^n - b^n = (a+b) \cdot \dots - \text{dla których } n ?$$

Uwaga: Przyjmujemy, że w postępie geometrycznym wszystkie wyrazy są różne od zera.

78. Drugi, piąty i dziesiąty wyraz pewnego postępu arytmetycznego tworzą postęp geometryczny trójwyrazowy. Jaki jest iloraz tego postępu geometrycznego?

79⁰ Obliczyć $1+2+4+7+8+10+13+14+16+19+\dots+1003$,
gdzie różnice między kolejnymi składnikami tworzą ciąg okresowy
 $1,2,3,1,2,3,1,2,3,\dots$

80⁰ Obliczyć

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{27} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{2187},$$

gdzie w mianownikach znajdują się potęgi dwójki i trójki ustawione rosnąco.

81. Dla których liczb naturalnych $n \geq 3$ prawdziwe jest następujące twierdzenie?
W dowolnym postępie arytmetycznym n -wyrazowym o sumie 0 co najmniej jeden z wyrazów jest równy 0.

82. Rozwiązać nierówności

$$\mathbf{a)} \sqrt{x+2}\sqrt{x-2} < \sqrt{x^2-1}$$

$$\mathbf{b)} \sqrt{x^2+27} > 2x$$

$$\mathbf{c)} x^2 \geq \frac{1}{x}$$

$$\mathbf{d)} x^3 \geq \frac{1}{x}$$

$$\mathbf{e)} x(x^2+8x^8) \leq x(x^2+x^8)$$

$$\mathbf{f)} \sqrt{4x-4-x^2} \leq x^{2007} + 2007$$

$$\mathbf{g)} \sqrt{x^2+2007} \leq \sqrt{3x^2+1999}$$

$$\mathbf{h)} |||||x|-1|-1|-1|-1|-1| \leq \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{i)} \sqrt{x^2-2x+1} + \sqrt{x^2-4x+4} < \sqrt{x^2+2x+1} + \sqrt{x^2-8x+16}$$

$$\mathbf{j)} |x^2-25| < 24$$

$$\mathbf{k)} (x+5)^{2007} + (x+5)^3 < (3x+1)^{2007} + (3x+1)^3$$

$$\mathbf{l)} (x^2+1)^{x+2} \leq (x^2+1)^{x^2}$$

83⁰. Która z liczb jest większa

- a) $123456 \cdot 123458$ czy 123457^2
 b) $1000!$ czy 1000^{1000}
 c) $1000!$ czy 100^{900}
 d) $1000!$ czy $(500!)^2$
 e) $\binom{2007}{666}^{2007}$ czy $\binom{2007}{666}^{666}$
 f) $(\sqrt[4]{83}-2)^{2007}$ czy $(\sqrt[4]{83}-2)^{666}$
 g) $(\sqrt[4]{79}-2)^{2007}$ czy $(\sqrt[4]{79}-2)^{666}$
 h) $(\sqrt[4]{79}-3)^{2007}$ czy $(\sqrt[4]{79}-3)^{666}$
 i) $(\sqrt[4]{79}-3)^{2007}$ czy $(\sqrt[4]{79}-3)^{667}$
 j) $2^{100!}$ czy $9^{99!}$
 k) 2^{1000} czy 3^{700}
 l) 5^{444} czy 3^{700}
 m) $\frac{17}{20}$ czy $\frac{16}{21}$
 n) $\frac{100}{7}$ czy $\frac{150}{11}$
 o) $\frac{8^{444}}{17^{17}}$ czy $\frac{16^{333}}{19^{17}}$
 p) $\frac{17^{667}}{3333^4 + 6666^4}$ czy $\frac{17^{666}}{3333^4}$
 q) $\binom{2007}{666}$ czy $\binom{2007}{667}$
 r) $\binom{2007}{666}$ czy $\binom{2008}{666}$
 s) $\binom{2007}{1666}$ czy $\binom{2007}{1667}$
 t) $\binom{2007}{1666}$ czy $\binom{2008}{1666}$
 u) $\frac{1}{\sqrt{37}-6}$ czy $\sqrt{37}+6$
 v) $\frac{1}{\sqrt{37}-6}$ czy 12
 w) $\frac{1}{\sqrt{37}-6}$ czy $\frac{1}{\sqrt{97}-10}$
 x) $\sqrt{37}-6$ czy $\frac{1}{10}$
 y) $(\sqrt{37}-6)^{666}$ czy $\frac{1}{100^{100}}$
 z) $\left(\frac{9}{4}\right)^{27/8}$ czy $\left(\frac{27}{8}\right)^{9/4}$

84. Czy w dowolnym 10-wyrazowym postępie arytmetycznym $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}$ zachodzi równość

- a) $a_1 + a_{10} = a_3 + a_7$;
- b) $a_3 + a_9 = 2a_6$;
- c) $a_2 + a_9 = a_5 + a_6$;
- d) $a_3 + a_8 = 2a_5$?

85. Czy prawdziwa jest nierówność

- a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^k} + \dots + \frac{1}{2^{22}} < \frac{10}{11}$;
- b) $\frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \frac{1}{625} + \dots + \frac{1}{5^k} + \dots + \frac{1}{5^{55}} < \frac{3}{11}$;
- c) $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots + \frac{1}{3^k} + \dots + \frac{1}{3^{33}} < \frac{5}{11}$;
- d) $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \dots + \frac{1}{4^k} + \dots + \frac{1}{4^{44}} < \frac{4}{11}$?

86. Suma wyrazów dowolnego postępu arytmetycznego n -wyrazowego, o wyrazach będących liczbami naturalnymi, jest podzielna przez n . Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

- a) $n = 2008$;
- b) $n = 2011$;
- c) $n = 2009$;
- d) $n = 2010$?

87. Podać zbiór rozwiązań nierówności

- a) $x^{1000} \leq x^{2007}$
- b) $x^{1001} \leq x^{2008}$
- c) $x^{1001} \leq x^{2007}$
- d) $x^{1000} \leq x^{2008}$

88. Podać zbiór rozwiązań nierówności

- a) $|x - 4| < 3$
- b) $|x + 3| \geq 2$
- c) $|x - 3| \leq 4$
- d) $|x - 3| < |x - 4|$

89. Podać zbiór rozwiązań nierówności

- a) $4 \leq x^2 \leq 9$
- b) $1 \leq |x - 3| \leq 2$
- c) $-1 \leq x^2 \leq 4$
- d) $3 \leq |x| \leq 4$

90. Wskazać dowolny dzielnik pierwszy podanej liczby

- a) $13^{17} + 6^{17}$
- b) $13^{20} - 12^{20}$
- c) $13^{18} - 8^{18}$
- d) $13^{19} - 10^{19}$

91. Czy podane liczby tworzą (z zachowaniem kolejności) trójwyrazowy postęp arytmetyczny

- a) $5 + 2\sqrt{6}$, 5 , $\frac{1}{5 + 2\sqrt{6}}$;
- b) $8 + 3\sqrt{7}$, 8 , $\frac{1}{8 + 3\sqrt{7}}$;
- c) $6 + 4\sqrt{2}$, 6 , $\frac{1}{6 + 4\sqrt{2}}$;
- d) $7 + 4\sqrt{3}$, 7 , $\frac{1}{7 + 4\sqrt{3}}$?

92. Czy podane liczby tworzą (z zachowaniem kolejności) trójwyrazowy postęp geometryczny

- a) $5 + 2\sqrt{6}$, 1 , $5 - 2\sqrt{6}$;
- b) $8 + 3\sqrt{7}$, 1 , $8 - 3\sqrt{7}$;
- c) $6 + 4\sqrt{2}$, 1 , $6 - 4\sqrt{2}$;
- d) $7 + 4\sqrt{3}$, 1 , $7 - 4\sqrt{3}$?

93. W dowolnym n -wyrazowym postępie arytmetycznym o sumie wyrazów równej n , k -ty wyraz jest równy 1. Dla podanego n wskazać takie k , aby powyższe zdanie było prawdziwe. Jeśli uważasz, że takiego k nie ma, napisz: *nie istnieje*.

- a) $n = 5$, $k = \dots$
- b) $n = 15$, $k = \dots$
- c) $n = 8$, $k = \dots$
- d) $n = 11$, $k = \dots$

94. Czy dla dowolnych różnych liczb całkowitych dodatnich a , b , podana liczba jest podzielna przez $a - b$

- a) $a^{2013} + b^{2013}$;
- b) $a^{2014} - b^{2014}$;
- c) $a^{2013} - b^{2013}$;
- d) $a^{2014} + b^{2014}$?

95. Czy dla dowolnych różnych liczb całkowitych dodatnich a, b , podana liczba jest podzielna przez $a + b$

- a) $a^{2013} + b^{2013}$;
- b) $a^{2014} - b^{2014}$;
- c) $a^{2013} - b^{2013}$;
- d) $a^{2014} + b^{2014}$?

96. Czy równość $\sqrt{x^2} = x$ jest prawdziwa dla $x = n^n$, jeżeli

- a) $n = 5^{222} - 3^{333}$;
- b) $n = 47^{111} - 7^{222}$;
- c) $n = 3^{222} - 2^{333}$;
- d) $n = 35^{111} - 6^{222}$?

97. Czy nierówność $x^{999} < x^{2013}$ jest prawdziwa dla $x = n^n$, jeżeli

- a) $n = 5^{222} - 3^{333}$;
- b) $n = 47^{111} - 7^{222}$;
- c) $n = 3^{222} - 2^{333}$;
- d) $n = 35^{111} - 6^{222}$?

98. Dany jest rosnący n -wyrazowy postęp arytmetyczny

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots, a_n)$$

o wyrazach rzeczywistych. Niech

$$N = a_1 + a_3 + a_5 + \dots$$

oraz

$$P = a_2 + a_4 + a_6 + \dots$$

będą sumami wyrazów o indeksach (numerach) odpowiednio nieparzystych i parzystych. Czy stąd wynika, że $N < P$, jeżeli

- a) $n = 2010$;
- b) $n = 2013$;
- c) $n = 2011$;
- d) $n = 2012$?

99. Czy przy tych samych oznaczeniach można wnioskować, że $N > P$, jeżeli

- a) $n = 2014$;
- b) $n = 2017$;
- c) $n = 2015$;
- d) $n = 2016$?

100. Podać zbiór rozwiązań nierówności, zapisując go w postaci przedziału lub sumy przedziałów

- a) $1 < |x-1| < 2$
 b) $1 < (x-4)^3 < 8$
 c) $1 < |x-2| < 3$
 d) $1 < (x-3)^2 < 4$

101. Dla podanych n, k , wskazać takie $m > k$, aby prawdziwa była równość

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{m}$$

Jeśli uważasz, że takiego m nie ma, napisz: *nie istnieje*.

- a) $n = 1000, \quad k = 200, \quad m = \dots$
 b) $n = 2013, \quad k = 500, \quad m = \dots$
 c) $n = 1500, \quad k = 300, \quad m = \dots$
 d) $n = 2000, \quad k = 400, \quad m = \dots$

Lista powtórkowa do kolokwium nr 2 (18 listopada 2013)

Uwaga: To są zadania do samodzielnej powtórki - na zajęciach rozwiążemy tylko część zadań z tej listy.

Proszę umieć wskazać zadania, które wymagają omówienia.

Kolokwium będzie zakładało umiejętność rozwiązywania zadań 1-128 oraz umiejętność samodzielnego myślenia.

102. Obliczyć sumy postępów (ciągów) arytmetycznych i geometrycznych.

- a) $1+2+3+\dots+n$
 b) $3+4+5+\dots+n$
 c) $1+2+4+\dots+2^n$
 d) $1+3+9+\dots+3^{2007}$
 e) $2^n+3\cdot 2^{n-1}+3^2\cdot 2^{n-2}+\dots+3^n$
 f) $\frac{1}{3}+1\frac{1}{2}+2\frac{2}{3}+\dots+103$
 g) $4+6+9+\dots+\frac{3^{100}}{2^{98}}$
 h) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{2^{100}}$
 i) $7+9+11+13+\dots+(6n+1)$
 j) $5+15+25+35+45+55+65+\dots+(100n+55)$.
 k) $5+8+11+14+\dots+101$
 l) $-17-13-9-\dots+99$
 m) $27+81+243+\dots+3^{33}$
 n) $1+\sqrt{2}+2+2\sqrt{2}+4+\dots+2^n$

103. Czy równość

$$(a+b)^3 = a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3$$

jest prawdziwa dla

- a) $a = 0, b = 2007$;
- b) $a = 2007, b = 2008$;
- c) $a = -2007, b = 0$;
- d) $a = 2007, b = -2007$?

104. Czy równość $\sqrt{x^2} = x$ jest prawdziwa dla

- a) $x = 2^{448} - 4^{336}$;
- b) $x = 16^{112} - 2^{448}$;
- c) $x = 4^{336} - 8^{224}$;
- d) $x = 8^{224} - 16^{112}$?

105. Czy dla dowolnego postępu geometrycznego trójwyrazowego a_1, a_2, a_3 podany niżej ciąg jest postępem geometrycznym

- a) a_1+7, a_2+7, a_3+7 ;
- b) $\sqrt[7]{a_1}, \sqrt[7]{a_2}, \sqrt[7]{a_3}$;
- c) $7a_1, 7a_2, 7a_3$;
- d) a_1^7, a_2^7, a_3^7 ?

106. Czy istnieją dwie liczby naturalne, których największy wspólny dzielnik stanowi $p\%$ ich najmniejszej wspólnej wielokrotności, jeżeli

- a) $p = 20$;
- b) $p = 50$;
- c) $p = 30$;
- d) $p = 40$?

107. Czy równość

$$a^4 \cdot b^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

jest prawdziwa dla

- a) $a = 2, b = 2$;
- b) $a = 2, b = 5/2$;
- c) $a = 3, b = 2$;
- d) $a = 3, b = 3/2$?

108. Czy prawdziwa jest równość

- a) $3 \cdot \binom{11}{4} = 2 \cdot \binom{11}{5}$;
- b) $3 \cdot \binom{19}{7} = 2 \cdot \binom{19}{8}$;
- c) $3 \cdot \binom{14}{5} = 2 \cdot \binom{14}{6}$;
- d) $3 \cdot \binom{17}{6} = 2 \cdot \binom{17}{7}$?

109. Czy prawdziwa jest równość

- a) $\sqrt{(6 - \sqrt{55})^{12}} = (6 - \sqrt{55})^6$;
- b) $\sqrt{(9 - \sqrt{55})^{18}} = (9 - \sqrt{55})^9$;
- c) $\sqrt{(7 - \sqrt{55})^{14}} = (7 - \sqrt{55})^7$;
- d) $\sqrt{(8 - \sqrt{55})^{16}} = (8 - \sqrt{55})^8$?

110. Czy prawdziwa jest nierówność

- a) $5 - \sqrt{24} < \frac{1}{10}$;
- b) $\sqrt{51} - 7 < \frac{1}{7}$;
- c) $\sqrt{26} - 5 < \frac{1}{10}$;
- d) $7 - \sqrt{47} < \frac{1}{7}$?

111. Czy prawdziwa jest nierówność

- a) $2\sqrt{2} < 3$;
- b) $4\sqrt[3]{2} < 5$;
- c) $3\sqrt{3} < 5$;
- d) $5\sqrt{5} < 11$?

112. 3-ci, 4-ty i 6-ty wyraz postępu arytmetycznego tworzą (w tej kolejności) postęp geometryczny trójwyrazowy. Czy stąd wynika, że postęp geometryczny tworzą także wyrazy (z zachowaniem kolejności):

- a) 3-ci, 5-ty, 11-ty;
- b) 3-ci, 6-ty, 12-ty;
- c) 4-ty, 6-ty, 10-ty;
- d) 6-ty, 8-my, 11-ty?

113. Podać taką liczbę p , że liczba p po zwiększeniu o $p\%$ daje n

- a) $n = 24$ $p = \dots$
- b) $n = 600$ $p = \dots$
- c) $n = 39$ $p = \dots$
- d) $n = 75$ $p = \dots$

114. Czy istnieją takie liczby naturalne a, b , że liczba $\text{NWD}(a, b)$ stanowi $p\%$ liczby $\text{NWW}(a, b)$, jeżeli

- a) $p = 15$;
- b) $p = 40$;
- c) $p = 20$;
- d) $p = 25$?

115. Podać zbiór rozwiązań nierówności

- a) $-4 < x^2 < 9$
- b) $8 < x^3 < 27$
- c) $4 < x^2 < 9$
- d) $-8 < x^3 < 27$

116. Podać przykład ciągu arytmetycznego n -wyrazowego o sumie wyrazów równej n , zawierającego wyraz równy 0

- a) $n = 3$
- b) $n = 6$
- c) $n = 4$
- d) $n = 5$

117. Wskazać dowolny dzielnik pierwszy podanej liczby

- a) $13^{13} - 6^{13}$
- b) $37^{37} + 12^{37}$
- c) $13^{13} + 6^{13}$
- d) $37^{37} - 12^{37}$

118. Czy nierówność $x^2 < x^4$ jest prawdziwa dla

- a) $x = \sqrt{29} - 4$;
- b) $x = \sqrt{29} - 7$;
- c) $x = \sqrt{29} - 5$;
- d) $x = \sqrt{29} - 6$?

119. Czy nierówność $x^3 < x^5$ jest prawdziwa dla

- a) $x = \sqrt{29} - 4$;
- b) $x = \sqrt{29} - 7$;
- c) $x = \sqrt{29} - 5$;
- d) $x = \sqrt{29} - 6$?

120. Podać (w postaci przedziału lub sumy przedziałów) zbiór rozwiązań nierówności.

- a) $1 < |x| < 64$
- b) $1 < x^6 < 64$
- c) $1 < x^2 < 64$
- d) $1 < x^3 < 64$

121. W dowolnym n -wyrazowym postępie arytmetycznym o sumie wyrazów równej S , co najmniej jeden z wyrazów jest równy w . Dla podanych n oraz S wskazać takie w , aby powyższe zdanie było prawdziwe. Jeśli uważasz, że takiego w nie ma, napisz: *nie istnieje*.

- a) $n = 3$, $S = 15$, $w = \dots$
- b) $n = 11$, $S = 77$, $w = \dots$
- c) $n = 5$, $S = 30$, $w = \dots$
- d) $n = 8$, $S = 64$, $w = \dots$

122. Czy prawdziwa jest nierówność

- a) $|\sqrt{11} - 5| < 1$;
- b) $|\sqrt{44} - 5| < 1$;
- c) $|\sqrt{22} - 5| < 1$;
- d) $|\sqrt{33} - 5| < 1$?

123. Liczba całkowita a jest mniejsza od liczby całkowitej dodatniej n o $p\%$, a liczba całkowita b jest większa od liczby n o $p\%$. Czy stąd wynika, że liczba a jest dzielnikiem liczby b , jeżeli

- a) $p = 20$;
- b) $p = 70$;
- c) $p = 50$;
- d) $p = 60$?

124. Czy podana liczba jest wymierna

a) $\sqrt{(3 - \sqrt{19})^2} + \sqrt{19}$;

b) $\sqrt{(\sqrt{59} - 9)^2} + \sqrt{59}$;

c) $\sqrt{(5 - \sqrt{19})^2} + \sqrt{19}$;

d) $\sqrt{(\sqrt{59} - 7)^2} + \sqrt{59}$?

125. Czy prawdziwa jest nierówność

a) $\frac{7 + \sqrt{17}}{11 + \sqrt{29}} < \frac{7 + \sqrt{19}}{11 + \sqrt{29}}$;

b) $\frac{7 - \sqrt{19}}{11 - \sqrt{29}} < \frac{7 - \sqrt{19}}{11 - \sqrt{31}}$;

c) $\frac{7 + \sqrt{19}}{11 + \sqrt{29}} < \frac{7 + \sqrt{19}}{11 + \sqrt{31}}$;

d) $\frac{7 - \sqrt{17}}{11 - \sqrt{29}} < \frac{7 - \sqrt{19}}{11 - \sqrt{29}}$?

126. Czy istnieje 17-wyrazowy postęp arytmetyczny, w którym liczba wyrazów całkowitych jest równa

a) 6;

b) 9;

c) 7;

d) 8?

127. Czy istnieje 17-wyrazowy postęp geometryczny, w którym liczba wyrazów wymiernych jest równa

a) 6;

b) 9;

c) 7;

d) 8?

128. Podać zbiór rozwiązań nierówności

a) $|x^2 - 5| < 4$

b) $|x^2 - 7| < 9$

c) $|x^2 - 13| < 12$

d) $|x^2 - 17| < 8$