

Czwartek 21 listopada 2013 - zaczynamy od omówienia zadań z kolokwium nr 2.

Uprościć wyrażenia

129. $4^{2+\log_2 7}$

130. $\log_{\sqrt{3}} 2 \cdot \log_5 9$

131. $\log_6 2 + \log_{36} 9$

132. $\frac{\log_m(mn) \cdot \log_n(mn)}{\log_m(mn) + \log_n(mn)}$ dla liczb naturalnych m i n większych od 1.

133. $\log_{(\sqrt{2}-1)}(\sqrt{2}+1)$

134. $2^{\log_3 5} - 5^{\log_3 2}$

135. Dla ilu trójek liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c różnych od 1 spełniona jest podana równość? Dla wszystkich? Dla żadnej? Dla niektórych (podać 3 przykłady, a jeśli przykładów jest mniej niż 3, podać wszystkie)?

a) $\log_a(bc) = (\log_a b) + \log_a c$

b) $\log_a(bc) = (\log_a b) \cdot \log_a c$

c) $\log_a(b+c) = (\log_a b) \cdot \log_a c$

d) $\log_a(b+c) = (\log_a b) + \log_a c$

e) $(\log_a b) \cdot \log_b c = \log_a c$

f) $\log_a(b^c) = c \cdot \log_a b$

136. Bez użycia kalkulatora rozstrzygnąć, która liczba jest większa:

a) $\log_2 7$ czy $\log_3 7$

b) $\log_{0,2} 7$ czy $\log_{0,3} 7$

c) $\log_2 7$ czy $\log_{0,3} 7$

d) $\log_{0,2} 7$ czy $\log_3 7$

e) $\log_2 0,7$ czy $\log_3 0,7$

f) $\log_{0,2} 0,7$ czy $\log_{0,3} 0,7$

g) $\log_2 0,7$ czy $\log_{0,3} 0,7$

h) $\log_{0,2} 0,7$ czy $\log_3 0,7$

i) $\log_9 27$ czy $\log_4 8$

j) $\log_3 8$ czy $\log_2 5$

k) $\log_5 127$ czy $\log_{10} 999$

l) $\log_3 100$ czy $\log_2 10$

m) $(\log_2 3) \cdot \log_5 7$ czy $(\log_2 7) \cdot \log_5 3$

n) $(\log_2 3) \cdot \log_7 5$ czy $(\log_7 9) \cdot \log_{16} 25$

o) $\log_2 3$ czy $\log_3 5$

p) $\log_3 7$ czy $\log_5 19$

q) $\log_2 3$ czy $\log_5 13$

r) $\log_3 5$ czy $\log_{15} 56$

Wskazówka do kilku ostatnich pytań:

Wiadomo, że wartość ułamka nie zmienia się, jeżeli licznik i mianownik pomnożymy przez tę samą liczbę różną od zera.

Podobnie, wartość logarytmu nie zmienia się, jeżeli podstawę i liczbę logarytmowaną

137. Czy jest prawdą, że $\log_2(a+b) = \log_2 a + \log_2 b$, jeżeli

- a) $a = 2, b = 2$
- b) $a = 3/2, b = 3$
- c) $a = 2, b = 3$
- d) $a = 3/2, b = 2$
- e) $a = 5, b = 5/4$

138. Czy jest prawdą, że $a \cdot \log_7 b = b \cdot \log_7 a$, jeżeli

- a) $a = 2, b = 3$
- b) $a = 2, b = 4$
- c) $a = 2, b = 5$
- d) $a = 3, b = 4$
- e) $a = 64/27, b = 256/81$

139. Czy jest prawdą, że

- a) $2 \cdot \log_3 5 = \log_3 10$
- b) $2 \cdot \log_3 5 = \log_3 25$
- c) $2 + \log_3 5 = \log_3 10$
- d) $2 + \log_3 5 = \log_3 45$
- e) $\sqrt{(2 - \log_3 7)^2} = 2 - \log_3 7$
- f) $\sqrt{(2 - \log_2 7)^2} = 2 - \log_2 7$
- g) $\sqrt{(2 - \log_5 23)^2} = 2 - \log_5 23$
- h) $\sqrt{(2 - \log_4 17)^2} = 2 - \log_4 17$

Oznaczenia: Przypominam, że $[x]$ oraz $\{x\}$ oznaczają odpowiednio część całkowitą i część ułamkową liczby rzeczywistej x .

140. Podać przykład takiej liczby rzeczywistej x , że

- a) $[x] = -4, \{x\} < 1/10$
- b) $[x] = -4, \{x\} > 9/10$
- c) $2 \cdot \{x\} \neq \{2x\}, x < 0$
- d) $2 \cdot \{x\} = \{5x\}, x > 10, x \notin \mathbb{N}$

141. Podać przykład takich liczb rzeczywistych x, y , że

- a) $[x+y] \neq [x] + [y]$
- b) $[2x+y] = 2[x] + [y] + 2$
- c) $[x+y] = \{x\} + \{y\}, x, y > 0$
- d) $[xy] = [x] \cdot [y] + 10$

142. Wyznaczyć wszystkie takie liczby rzeczywiste a , że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi równość $[x+a] = [x] + a$.

143. Rozwiązać nierówności

- a) $\log_{2x}(x^2+1) \leq \log_{2x}(x^2+3x)$
- b) $(x^2+x+1)^{3x} > (x^2+x+1)^{x+1}$
- c) $x^4 - 5x^2 + 4 < 0$
- d) $\log_2 x + \log_x 4 < 3$

144. Wyznaczyć wszystkie takie pary liczb p, q , że p i q są pierwiastkami równania

$$x^2 + px + q = 0.$$

Sposób I

Liczby p i q są pierwiastkami podanego równania wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi tożsamość

$$x^2 + px + q = (x-p)(x-q).$$

.....
Odpowiedź: Są dwie pary liczb spełniające warunki zadania:

$p = \dots, q = \dots$ oraz $p = \dots, q = \dots$

Sposób II

Liczby p i q są pierwiastkami podanego równania wtedy i tylko wtedy, gdy

$$p^2 + p^2 + q = 0$$

oraz

$$q^2 + pq + q = 0.$$

.....
Odpowiedź: Są trzy pary liczb spełniające warunki zadania:

$p = \dots, q = \dots; p = \dots, q = \dots$ oraz $p = \dots, q = \dots$

Dlaczego oba sposoby rozwiązania prowadzą do różnych odpowiedzi?

Powtórka

Kolokwium nr 3 (16 grudnia 2013) będzie zakładało umiejętność rozwiązywania zadań **1–244** oraz umiejętność samodzielnego myślenia.

Odpowiedzi do zadań **153–244** znajdują się na liście **3o**.

145. Dane są liczby rzeczywiste x i y spełniające warunki $|x-4| < 1$ oraz $|y-4| < 2$. Czy stąd wynika, że

- a) $|x-y| < 2$
- b) $|x+y| > 6$
- c) $|x+y| < 10$
- d) $|xy| > 10$
- e) $|xy| < 40$

146. Suma wyrazów rosnącego postępu arytmetycznego 2013-wyrazowego o wyrazach dodatnich jest liczbą wymierną. Czy stąd wynika, że co najmniej jeden wyraz postępu jest liczbą wymierną?

147. To samo pytanie dla postępu 2014-wyrazowego.

148. Kilogram ziemniaków kosztuje 50 groszy. Jaka będzie cena ziemniaków, jeżeli ich cena wzrośnie

- a) o 2000%
- b) o 1000%
- c) o 400%
- d) o 200%
- e) o 100%
- f) o 20%

149. Za 17 złotych i 37 groszy można kupić 30 kg ziemniaków. Ile ziemniaków można będzie kupić za 34 złote i 74 grosze, jeżeli ich cena

- a) wzrośnie o 20%
- b) zmaleje o 20%
- c) wzrośnie o 50%
- d) zmaleje o 50%
- e) wzrośnie o 100%
- f) zmaleje o 90%

150. W rosnącym postępie arytmetycznym o wyrazach dodatnich ósmy wyraz jest większy od piątego o 20%. Podać przykład takich m i n , że n -ty wyraz jest od m -tego

- a) większy o 100%
- b) mniejszy o 10%
- c) większy o 10%
- d) mniejszy o 1%
- e) większy o 1000%
- f) mniejszy o 99%

151. Czy istnieją takie liczby pierwsze p i q , że liczba q jest od liczby p

- a) większa o 100%
- b) większa o 50%
- c) większa o 40%
- d) większa o 20%
- e) większa o 5%
- f) mniejsza o 5%

152. Dla funkcji f zdefiniowanej podanym wzorem oraz dla podanego zbioru Z rozstrzygnąć, czy funkcja f jest różnowartościowa na zbiorze Z oraz podać zbiór wartości funkcji f na zbiorze Z .

- a) $f(x) = x^2$, $Z = [-3, -1)$
- b) $f(x) = x^2$, $Z = (-3, 4]$
- c) $f(x) = x^2$, $Z = [-3, -2] \cup [3, 5]$
- d) $f(x) = x^2$, $Z = (-3, -2] \cup [3, 4)$
- e) $f(x) = x^2$, $Z = (0, 3)$
- f) $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $Z = (0, 3)$
- g) $f(x) = x^2 + 2x + 1$, $Z = (0, 3)$
- h) $f(x) = 2^x$, $Z = (-3, 3)$
- i) $f(x) = |2^x - 3|$, $Z = (-3, 3)$
- j) $f(x) = |2^x - 5|$, $Z = (-3, 3)$

153. Czy prawdziwa jest równość

- a) $\log_2 3 = 2 \cdot \log_4 3$;
- b) $\log_4 9 = 2 \cdot \log_4 3$;
- c) $\log_2 6 = 1 + \log_2 3$;
- d) $\log_2 16 = 2 \cdot \log_3 9$?

154. Czy równość $(\sqrt{a})^b = a^{\sqrt{b}}$ jest prawdziwa dla

- a) $a = 16$, $b = 2$;
- b) $a = 11$, $b = 3$;
- c) $a = 6$, $b = 4$;
- d) $a = 1$, $b = 5$?

155. Czy podana liczba jest liczbą całkowitą podzielną przez 10

- a) $\frac{29!}{26!}$;
- b) $\frac{30!}{28!}$;
- c) $\frac{35!}{31!}$;
- d) $\frac{36!}{33!}$?

156. Czy prawdziwa jest nierówność

- a) $\sqrt{3} + \sqrt{8} < 5$;
- b) $\sqrt{5} + \sqrt{17} < 6$;
- c) $\sqrt{8} + \sqrt{15} < 7$;
- d) $\sqrt{10} + \sqrt{17} < 7$?

157. Czy podana liczba jest całkowita

- a) $2^{\log_4 3}$;
- b) $4^{\log_2 3}$;
- c) $2^{\log_8 27}$;
- d) $8^{\log_4 25}$?

158. Liczby całkowite dodatnie m i n są dzielnikami liczby całkowitej dodatniej k . Czy stąd wynika, że liczba k jest podzielna przez

- a) mn ;
- b) najmniejszą wspólną wielokrotność liczb m i n ;
- c) największy wspólny dzielnik liczb m i n ;
- d) $m+n$?

159. Czy nierówność $3x < x^2 + 2$ jest prawdziwa dla

- a) $x = \log_3 2$;
- b) $x = \log_2 3$;
- c) $x = \log_2 5$;
- d) $x = \log_5 2$?

160. Czy podana liczba jest całkowita

- a) $\frac{15!}{35}$;
- b) $\frac{16!}{36}$;
- c) $\frac{17!}{37}$;
- d) $\frac{18!}{38}$?

161. Czy równanie $x^3 + y^4 = z^5$ jest spełnione przez liczby

- a) $x = 2^8, y = 2^6, z = 2^5$;
- b) $x = 2, y = 2, z = 2$;
- c) $x = 2^{12}, y = 2^9, z = 2^7$;
- d) $x = 2^{24}, y = 2^{24}, z = 2^{25}$?

162. Czy prawdziwa jest nierówność

- a) $\frac{11}{17} < \frac{9}{19}$;
- b) $\frac{11}{17} < \frac{13}{15}$;
- c) $\frac{11}{17} < \frac{9}{17}$;
- d) $\frac{11}{17} < \frac{11}{19}$?

163. Czy równanie $a^2 + 2ab + b^2 = c^2$ jest spełnione przez liczby

- a) $a = 175, b = 429, c = 2006$;
- b) $a = -449, b = 409, c = 40$;
- c) $a = 449, b = -409, c = 40$;
- d) $a = 449, b = 409, c = -40$?

164. Czy nierówność $\sqrt{x+y} < \sqrt{x} + \sqrt{y}$ jest prawdziwa dla

- a) $x = 9^{37}, y = 25^{13}$;
- b) $x = 2006, y = 8024$;
- c) $x = \binom{17}{5}, y = \binom{17}{6}$;
- d) $x = \log_7 9, y = \log_{11} 37$?

165. Czy prawdziwa jest nierówność

- a) $2^{1000} < 8^{400}$;
- b) $3^{1001} < 9^{500}$;
- c) $4^{1002} < 2^{2006}$;
- d) $5^{1003} < 25^{600}$?

166. Czy dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej x zachodzi równość

$$(x^a)^b = x^a \cdot x^b,$$

jeżeli

- a) $a = 2, b = 2$;
- b) $a = 3, b = 3$;
- c) $a = 3, b = 3/2$;
- d) $a = 2, b = 5/2$?

167. Niech $a_n = \frac{n!}{37^n}$. Czy wtedy

- a) $a_{10} < a_{20}$;
- b) $a_{36} < a_{37}$;
- c) $a_{37} < a_{38}$;
- d) $a_{40} < a_{50}$?

168. Dane są takie liczby całkowite a, b, c, d , że liczby $a+b+c$ oraz $b+c+d$ są nieparzyste. Czy stąd wynika, że

- a) liczba $a+d$ jest nieparzysta;
- b) liczba $a+d$ jest parzysta;
- c) liczba $b+c$ jest nieparzysta;
- d) liczba $b+c$ jest parzysta?

169. Liczby rzeczywiste dodatnie x i y spełniają nierówność $|x - y| < 1$. Czy stąd wynika, że

- a) $|x^2 - y^2| < 1$;
- b) $x + y < 1$;
- c) $|x^2 - y^2| < x + y$;
- d) $x^2 + y^2 < (x + y)^2$?

170. Czy istnieje taka liczba rzeczywista M , że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

- a) $\frac{n}{n+1} < M$;
- b) $\frac{n+1}{n} < M$;
- c) $\frac{n+1}{n^2+1} < M$;
- d) $\frac{n^2+1}{n+1} < M$?

171. Dowolna liczba całkowita dodatnia jest podzielna przez mn wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona jednocześnie podzielna przez m i przez n . Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

- a) $m = 12, n = 15$;
- b) $m = 13, n = 18$;
- c) $m = 14, n = 21$;
- d) $m = 15, n = 22$?

172. Czy dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi równość

- a) $(2^{2^n})^2 = 2^{2^{n+1}}$;
- b) $(2^{2^n})^4 = 2^{2^{n+2}}$;
- c) $(2^{2^n})^6 = 2^{2^{n+3}}$;
- d) $(2^{2^n})^8 = 2^{2^{n+4}}$?

173. Czy dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z spełniających warunki $|x - 2| < 1$, $|y - 3| < 1$ oraz $|z - 5| < 1$ zachodzi nierówność

- a) $x + y + z < 12$;
- b) $x + y + z > 7$;
- c) $xyz < 60$;
- d) $xyz > 10$?

174. Czy liczba $\log_4(n^2+7)$ jest wymierna dla

- a) $n=1$;
- b) $n=3$;
- c) $n=5$;
- d) $n=7$?

175. Czy jest prawdą, że

- a) $\log_5 26 < \sqrt{22} - 3$;
- b) $\log_3 26 < \sqrt{18} - 1$;
- c) $\log_2 26 < \sqrt{26}$;
- d) $\log_2 26 < \sqrt{14}$?

176. Czy podana liczba jest wymierna

- a) $\sqrt{(5-2\sqrt{6})^2} + \sqrt{(7-2\sqrt{6})^2}$;
- b) $\sqrt{(5-2\sqrt{7})^2} + \sqrt{(6-2\sqrt{7})^2}$;
- c) $\sqrt{(4+2\sqrt{5})^2} + \sqrt{(5-2\sqrt{5})^2}$;
- d) $\sqrt{(5+2\sqrt{10})^2} + \sqrt{(6-2\sqrt{10})^2}$?

177. Czy prawdziwa jest nierówność

- a) $(50!)^{100} < (100!)^{50}$;
- b) $100! < 10^{200}$;
- c) $100! < 100^{45}$;
- d) $5^{222} < 3^{333}$?

178. Dane są takie liczby rzeczywiste a, b, c , że liczby $a+b$ oraz $a+b+c$ są wymierne. Czy stąd wynika, że

- a) liczba a jest wymierna;
- b) liczba c jest wymierna;
- c) liczba $b+c$ jest wymierna;
- d) liczba b jest niewymierna?

179. Dla dowolnej liczby naturalnej k liczba k^3 jest podzielna przez m wtedy i tylko wtedy, gdy liczba k^3 jest podzielna przez n . Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

- a) $m=2^3, n=2^4$;
- b) $m=2^5, n=2^6$;
- c) $m=2^7, n=2^9$;
- d) $m=2^8, n=2^{10}$?

180. Czy podane liczby tworzą (w podanej kolejności) postęp arytmetyczny trójwyrazowy

- a) $\log_7 1, \log_7 3, \log_7 5$;
- b) $\log_7 1, \log_7 4, \log_7 16$;
- c) $\log_7 4, \log_7 6, \log_7 9$;
- d) $\log_7 25, \log_7 10, \log_7 4$?

181. Czy funkcja f określona wzorem $f(x) = \{x\}$ (część ułamkowa) jest różnowartościowa na przedziale

- a) $\left[-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$;
- b) $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$;
- c) $\left(-\frac{3}{5}, \frac{3}{5}\right)$;
- d) $\left[-\frac{3}{7}, \frac{3}{7}\right)$?

182. Czy prawdziwa jest nierówność

- a) $3 - 2\sqrt{2} < \frac{1}{6}$;
- b) $3\sqrt{3} - 5 < \frac{1}{5}$;
- c) $7 - 5\sqrt{2} < \frac{1}{15}$;
- d) $9 - 4\sqrt{5} < \frac{1}{18}$?

183. Czy prawdziwa jest nierówność

- a) $242^7 < 121^8$;
- b) $250^7 < 125^8$;
- c) $260^7 < 130^8$;
- d) $266^7 < 133^8$?

184. W dowolnym postępie arytmetycznym 4-wyrazowym a_1, a_2, a_3, a_4 zachodzi równość

$$a_1 + Xa_3 = Ya_2 + a_4.$$

Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

- a) $X = 2, Y = 2$;
- b) $X = 3, Y = 3$;
- c) $X = 4, Y = 5$;
- d) $X = 5, Y = 6$?

185. Czy nierówność $\log_a 3 < \log_a 7$ jest prawdziwa dla

- a) $a = (\sqrt{63} - 9)^{2010}$;
- b) $a = (\sqrt{73} - 9)^{2012}$;
- c) $a = (\sqrt{83} - 9)^{2013}$;
- d) $a = (\sqrt{93} - 9)^{2014}$?

186. Suma dowolnego postępu arytmetycznego n -wyrazowego o wszystkich wyrazach będących liczbami naturalnymi jest podzielna przez n . Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

- a) $n = 2011$;
- b) $n = 2012$;
- c) $n = 2013$;
- d) $n = 2014$?

187. Czy liczba $\log_x y$ jest wymierna dla

- a) $x = \log_2 3, y = \log_3 2$;
- b) $x = \log_3 5, y = \log_5 3$;
- c) $x = \log_{128} 1024, y = \log_{1024} 128$;
- d) $x = \log_{243} 2187, y = \log_{2187} 243$?

188. Dla dowolnych liczb naturalnych a, b, c, d , jeżeli iloczyn $abcd$ jest podzielny przez n^3 , to co najmniej jedna z liczb a, b, c, d jest podzielna przez n . Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

- a) $n = 2$;
- b) $n = 4$;
- c) $n = 8$;
- d) $n = 16$?

189. Czy równość

$$(\log_a b)^{\log_c d} = d^{\log_c \log_a b}$$

jest prawdziwa dla

- a) $a = 2, b = 4, c = 8, d = 16$;
- b) $a = 3, b = 9, c = 5, d = 25$;
- c) $a = 4, b = 3, c = 8, d = 27$;
- d) $a = 2, b = 3, c = 5, d = 7$?

190. Niech $A(n) = \sqrt[n]{n}$. Czy liczba $\log_{A(n)} A(k)$ jest całkowita, jeżeli

- a) $n = 16, \quad k = 4$;
- b) $n = 16, \quad k = 8$;
- c) $n = 64, \quad k = 4$;
- d) $n = 64, \quad k = 8$?

191. Niech

$$\prod_{i=m}^n a_i = a_m \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdot a_{m+3} \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n.$$

Czy podana liczba jest wymierna

- a) $\prod_{i=2}^8 \log_i(i+1)$;
- b) $\prod_{i=2}^9 \log_i(i+1)$;
- c) $\prod_{i=3}^8 \log_i(i+1)$;
- d) $\prod_{i=3}^9 \log_i(i+1)$?

192. Czy prawdziwa jest nierówność

- a) $\log_2 50 > 2 \cdot \log_2 7$;
- b) $\log_3 15 > 2 \cdot \log_3 4$;
- c) $\log_5 35 > 2 \cdot \log_5 6$;
- d) $\log_7 25 > 2 \cdot \log_7 5$?

193. Czy równość $\sqrt{n^{2n}} = n^n$ jest prawdziwa dla

- a) $n = 37^{37} - 31^{31}$;
- b) $n = 37^{37} - 41^{41}$;
- c) $n = 37^{37} - 44^{44}$;
- d) $n = 37^{37} - 34^{34}$?

194. Czy równość $[x+y] = [x] + y$, gdzie $[a]$ oznacza część całkowitą liczby a , jest prawdziwa dla

- a) $x = \log_2 3, \quad y = \log_3 3$;
- b) $x = \log_2 4, \quad y = \log_3 4$;
- c) $x = \log_2 6, \quad y = \log_3 6$;
- d) $x = \log_2 9, \quad y = \log_3 9$?

195. Czy w dowolnym rosnącym postępie geometrycznym 10-wyrazowym o ilorazie 2 istnieją dwa wyrazy, z których jeden jest większy od drugiego

- a) o 200% ;
- b) o 300% ;
- c) o 800% ;
- d) o 1500% ?

196. Czy w dowolnym rosnącym postępie geometrycznym 10-wyrazowym o ilorazie 3 istnieją dwa wyrazy, z których jeden jest większy od drugiego

- a) o 200% ;
- b) o 300% ;
- c) o 800% ;
- d) o 1500% ?

197. Czy równość $\text{NWD}(m, n) \cdot \text{NWW}(m, n) = mn$ jest prawdziwa dla

- a) $m = 14^{14}$, $n = 25^{25}$;
- b) $m = 24^{24}$, $n = 35^{35}$;
- c) $m = 44^{44}$, $n = 55^{55}$;
- d) $m = 84^{84}$, $n = 105^{105}$?

198. Dla dowolnych liczb naturalnych m, n , jeżeli iloczyn mn jest podzielny przez d^5 , to co najmniej jedna z liczb m, n jest podzielna przez d . Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

- a) $d = 21$;
- b) $d = 25$;
- c) $d = 27$;
- d) $d = 29$?

199. Czy nierówność $4x < x^2 + 3$ jest prawdziwa dla

- a) $x = \log_2 13$;
- b) $x = \log_3 13$;
- c) $x = \log_{11} 13$;
- d) $x = \log_{23} 13$?

200. Dla dowolnej liczby naturalnej k , liczba k^5 jest podzielna przez 2^m wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzielna przez 2^n . Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

- a) $m = 11$, $n = 14$;
- b) $m = 13$, $n = 15$;
- c) $m = 20$, $n = 21$;
- d) $m = 21$, $n = 23$?

201. Dla dowolnej liczby naturalnej k , liczba k^5 jest podzielna przez 4^m wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzielna przez 4^n . Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

- a) $m = 11, \quad n = 14$;
- b) $m = 13, \quad n = 15$;
- c) $m = 20, \quad n = 21$;
- d) $m = 21, \quad n = 23$?

202. Czy podana nierówność jest prawdziwa?

Przypomnienie: $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x .

- a) $[\sqrt{23}] < [\sqrt{27}]$;
- b) $[\sqrt{43}] < [\sqrt{47}]$;
- c) $[\sqrt{63}] < [\sqrt{67}]$;
- d) $[\sqrt{83}] < [\sqrt{87}]$.

203. Czy istnieje liczba zakończona trzema szóstkami podzielna przez

- a) 4;
- b) 6;
- c) 9;
- d) 11?

204. Czy dowolna liczba zakończona trzema szóstkami jest podzielna przez

- a) 4;
- b) 6;
- c) 9;
- d) 11?

205. Czy nierówność $\log_a 2 < \log_b 2$ jest prawdziwa dla

- a) $a = \sqrt{17} - 4, \quad b = \sqrt{19} - 4$;
- b) $a = \sqrt{23} - 4, \quad b = \sqrt{29} - 4$;
- c) $a = \sqrt{31} - 4, \quad b = \sqrt{37} - 4$;
- d) $a = \sqrt{41} - 4, \quad b = \sqrt{43} - 4$?

206. Czy funkcja $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \{\sqrt{x}\}$, gdzie $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x , jest rosnąca na przedziale

- a) $[2, 4]$;
- b) $(3, 5)$;
- c) $[5, 7]$;
- d) $(7, 9)$?

207. Czy prawdziwa jest nierówność

- a) $(10^4)! < 10^{4 \cdot 10^4}$;
- b) $(10^5)! < 10^{5 \cdot 10^5}$;
- c) $(10^6)! < 10^{4 \cdot 10^6}$;
- d) $(10^7)! < 10^{5 \cdot 10^7}$?

208. Czy nierówność $a^c < b^c$ jest prawdziwa dla

- a) $a = \log_2 3$, $b = \log_2 6$, $c = (\log_2 4) - 2$;
- b) $a = \log_3 5$, $b = \log_3 6$, $c = (\log_3 8) - 2$;
- c) $a = \log_4 7$, $b = \log_4 6$, $c = (\log_4 9) - 2$;
- d) $a = \log_5 9$, $b = \log_5 6$, $c = (\log_5 27) - 2$?

209. Czy podana liczba jest wymierna

- a) $(\log_2 9) \cdot \log_3 8$;
- b) $(\log_3 25) \cdot \log_5 27$;
- c) $(\log_5 49) \cdot \log_7 50$;
- d) $(\log_7 81) \cdot \log_9 80$?

210. Czy równość $\sqrt{x^2 + 4x + 4} = x + 2$ jest prawdziwa dla

- a) $x = \log_2(2 - \sqrt{3})$;
- b) $x = \log_2(\sqrt{5} - 2)$;
- c) $x = \log_3(4 - \sqrt{15})$;
- d) $x = \log_3(\sqrt{26} - 5)$?

211. Czy równość $\sqrt{x^2 + 2x + 1} = x + 1$ jest prawdziwa dla

- a) $x = \log_5(5 - \sqrt{23})$;
- b) $x = \log_5(\sqrt{27} - 5)$;
- c) $x = \log_6(7 - \sqrt{47})$;
- d) $x = \log_6(\sqrt{67} - 8)$?

212. Czy istnieją dwie liczby wymierne dodatnie, z których jedna jest większa od drugiej o

- a) 20%;
- b) 33%;
- c) 37%;
- d) 50%?

213. Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n , jeżeli liczba n^n jest podzielna przez d^d , to liczba n jest podzielna przez d . Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

- a) $d = 21$;
- b) $d = 23$;
- c) $d = 25$;
- d) $d = 27$?

214. Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n , względnie pierwszej z d , liczba $n^2 - 1$ jest podzielna przez d . Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

- a) $d = 4$;
- b) $d = 5$;
- c) $d = 6$;
- d) $d = 8$?

215. Czy nierówność $\log_a \sqrt{2} < \log_a \sqrt[3]{2}$ jest prawdziwa dla

- a) $a = 8 - 5\sqrt{2}$;
- b) $a = 8 - 4\sqrt{3}$;
- c) $a = 8 - 3\sqrt{5}$;
- d) $a = 8 - 4\sqrt{2}$?

216. Czy nierówność $\log_a b < \log_b a$ jest prawdziwa dla

- a) $a = 2$ $b = 5$;
- b) $a = 0,2$ $b = 0,5$;
- c) $a = 0,2$ $b = 5$;
- d) $a = 0,22$ $b = 5$?

217. Czy nierówność $\{x\}^2 < \{x\}$, gdzie $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x , jest prawdziwa dla

- a) $x = \log_4 8$;
- b) $x = \log_4 16$;
- c) $x = \log_4 24$;
- d) $x = \log_4 32$?

218. Czy równość $[x + y] = [x] + [y]$, gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x , jest prawdziwa dla

- a) $x = \log_4 7$, $y = \log_9 23$;
- b) $x = \log_4 11$, $y = \log_9 29$;
- c) $x = \log_4 31$, $y = \log_9 26$;
- d) $x = \log_4 37$, $y = \log_9 28$?

219. Czy dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z spełniających nierówności

$$|x - y| < 2 \quad \text{oraz} \quad |y - z| < 3,$$

zachodzi nierówność

- a) $|x - z| < 4$;
- b) $|x - z| < 5$;
- c) $|x - z| < 6$;
- d) $|x - z| > 1$?

220. Czy dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z spełniających nierówności

$$|x + y| < 2012 \quad \text{oraz} \quad |y + z| < 2013,$$

zachodzi nierówność

- a) $|x + z| < 4025$;
- b) $|x - z| < 1$;
- c) $|x - z| < 4025$;
- d) $|x - z| > 1$?

221. Obliczyć (znak $[]$ oznacza część całkowitą)

- a) $[\sqrt{90} + 1] = \dots$;
- b) $[\sqrt{80} + 2] = \dots$;
- c) $[\sqrt{70} + 3] = \dots$;
- d) $[\sqrt{60} + 4] = \dots$.

222. Podać zbiór rozwiązań nierówności

- a) $-1 \leq x^2 < 25 \Leftrightarrow x \in \dots$;
- b) $-1 \leq x^3 < 27 \Leftrightarrow x \in \dots$;
- c) $1 \leq x^4 < 16 \Leftrightarrow x \in \dots$;
- d) $1 \leq x^5 < 32 \Leftrightarrow x \in \dots$.

223. Uprościć podane wyrażenia podając wynik w postaci liczby całkowitej

- a) $\log_6 12 + 3 \cdot \log_6 18 + \log_6 24 = \dots$;
- b) $2 \cdot \log_6 12 + 4 \cdot \log_6 18 + \log_6 24 = \dots$;
- c) $\log_6 12 + 5 \cdot \log_6 18 + 2 \cdot \log_6 24 = \dots$;
- d) $3 \cdot \log_6 12 + 5 \cdot \log_6 18 + \log_6 24 = \dots$.

224. Wskazać taką liczbę naturalną k , że

$$10^k < n < 10^{2k}.$$

- a) $n = 3000!$, $k = \dots$;
- b) $n = 6^{666}$, $k = \dots$;
- c) $n = 77^7$, $k = \dots$;
- d) $n = 2^{1200} \cdot (100!)^{10}$, $k = \dots$.

225. Dla podanych liczb a , b wskazać taką liczbę c , że liczby

$$\log_a 37, \log_b 37, \log_c 37$$

tworzą (w tej właśnie kolejności) postęp arytmetyczny trójwyrazowy.

- a) $a = 64$, $b = 8$, $c = \dots$;
- b) $a = 4$, $b = 8$, $c = \dots$;
- c) $a = 2$, $b = 8$, $c = \dots$;
- d) $a = 64$, $b = 16$, $c = \dots$.

226. Przyjmujemy oznaczenia jak w zadaniu poprzednim. Podać wartość podanej liczby w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego, jeśli liczba jest wymierna. Napisać literkę **N**, jeżeli liczba jest niewymierna.

- a) $\prod_{i=2}^7 \log_i(i+2) = \dots$;
- b) $\prod_{i=2}^8 \log_i(i+2) = \dots$;
- c) $\prod_{i=3}^7 \log_i(i+2) = \dots$;
- d) $\prod_{i=3}^8 \log_i(i+2) = \dots$.

227. Dla podanej liczby a podać taką liczbę b (w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego), aby spełniona była równość

$$\log_7 a + \log_7 b = \log_7(a+b).$$

- a) $a = 5/2$, $b = \dots$;
- b) $a = 3$, $b = \dots$;
- c) $a = 7/2$, $b = \dots$;
- d) $a = 8/3$, $b = \dots$.

228. Niech

$$A(n) = 3^{3^{3^n}}$$

$$B(n) = \log_3 A(n)$$

$$C(n) = \log_{A(n)} A(n+1)$$

$$D(n) = \log_{C(n)} B(n).$$

Zapisać podane liczby w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

PRZYPOMNIENIE: Potęgowanie wykonujemy **od góry**: $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.

- a) $D(9) = \dots$;
- b) $D(27) = \dots$;
- c) $D(81) = \dots$;
- d) $D(243) = \dots$.

229. Podać przykład liczby niecałkowitej x spełniającej podane równanie, gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y . Wynik podać w postaci ułamka dziesiętnego skończonego lub okresowego (taka postać odpowiedzi jest częścią zadania, więc wyniki poprawne, ale w innej postaci, nie będą uznawane).

- a) $\{x\} = \{3x\}$, $x = \dots$;
- b) $\{x\} = \{4x\}$, $x = \dots$;
- c) $\{2x\} = \{7x\}$, $x = \dots$;
- d) $\{2x\} = \{13x\}$, $x = \dots$.

230. Dla podanych liczb rzeczywistych a, c podać taką liczbę rzeczywistą b , aby liczby $\log_8 a, \log_8 b, \log_8 c$ (w tej właśnie kolejności) tworzyły trójwyrazowy postęp arytmetyczny.

- a) $a = 2$, $c = 8$, $b = \dots$;
- b) $a = 1$, $c = 9$, $b = \dots$;
- c) $a = 3$, $c = 5$, $b = \dots$;
- d) $a = 8$, $c = 18$, $b = \dots$.

231. Dla podanych liczb rzeczywistych a, c podać taką liczbę rzeczywistą b , aby liczby $8^a, 8^b, 8^c$ (w tej właśnie kolejności) tworzyły trójwyrazowy postęp geometryczny.

- a) $a = 2$, $c = 8$, $b = \dots$;
- b) $a = 1$, $c = 9$, $b = \dots$;
- c) $a = 3$, $c = 5$, $b = \dots$;
- d) $a = 8$, $c = 18$, $b = \dots$.

232. Dla podanej liczby rzeczywistej a podać taką liczbę rzeczywistą b , aby prawdziwa była równość $\log_4(a+b) = (\log_4 a) + \log_4 b$.

- a) $a = 2, \quad b = \dots\dots\dots$;
- b) $a = 4, \quad b = \dots\dots\dots$;
- c) $a = 3, \quad b = \dots\dots\dots$;
- d) $a = 5/2, \quad b = \dots\dots\dots$.

233. Suma dowolnego postępu arytmetycznego n -wyrazowego $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ jest równa $m \cdot a_k$. W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby tak, aby powyższe zdanie było prawdziwe. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby o żądanej własności nie istnieją.

- a) $n = 11, \quad m = \dots\dots\dots, \quad k = \dots\dots\dots$;
- b) $n = \dots\dots\dots, \quad m = \dots\dots\dots, \quad k = 5$;
- c) $n = \dots\dots\dots, \quad m = 7, \quad k = \dots\dots\dots$;
- d) $n = \dots\dots\dots, \quad m = 8, \quad k = \dots\dots\dots$.

234. Zapisać podany zbiór w postaci przedziału lub sumy przedziałów.

- a) $\{x^2 : 1 < x < 4\} = \dots\dots\dots$;
- b) $\{x^2 : -9 < x < 4\} = \dots\dots\dots$;
- c) $\{x^3 : -1 < x < 2\} = \dots\dots\dots$;
- d) $\{x^3 : 1 < |x| < 2\} = \dots\dots\dots$.

235. Niech $\prod_{i=m}^n a_i = a_m \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdot a_{m+3} \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$.

Zapisać wartość podanego iloczynu w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego, jeśli liczba jest wymierna. Napisać literkę **N**, jeżeli liczba jest niewymierna.

- a) $\prod_{i=1}^4 \log_{(3i+1)}(3i+4) = \dots\dots\dots$;
- b) $\prod_{i=2}^4 \log_{(3i+1)}(3i+4) = \dots\dots\dots$;
- c) $\prod_{i=2}^{15} \log_{(3i+1)}(3i+4) = \dots\dots\dots$;
- d) $\prod_{i=2}^{16} \log_{(3i+1)}(3i+4) = \dots\dots\dots$.

236. Dla podanych liczb a, b zapisać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego wartość liczby $\log_x y$, gdzie $x = \log_a b$ oraz $y = \log_b a$. Napisać literkę **N**, jeżeli liczba ta jest niewymierna.

- a) $a = 2^{2^4}$, $b = 2^{2^6}$, $\log_x y = \dots$;
 b) $a = 2^{2^7}$, $b = 2^{2^{14}}$, $\log_x y = \dots$;
 c) $a = 2^{2^9}$, $b = 2^{2^{12}}$, $\log_x y = \dots$;
 d) $a = 2^{2^{16}}$, $b = 2^{2^{32}}$, $\log_x y = \dots$.

237. Dla podanej liczby a wskazać taką liczbę rzeczywistą dodatnią b , aby spełniona była równość $1 + (\log_5 a) + \log_5 b = \log_5 (2a^2 + 2b^2)$.

- a) $a = 2$, $b = \dots$;
 b) $a = 3$, $b = \dots$;
 c) $a = 4$, $b = \dots$;
 d) $a = 6$, $b = \dots$.

238. Dla podanej liczby naturalnej k podać **największą** liczbę całkowitą dodatnią d , dla której prawdziwe jest następujące zdanie:

Dla dowolnych liczb całkowitych m, n , jeżeli iloczyn mn jest podzielny przez k , to co najmniej jedna z liczb m, n jest podzielna przez d .

- a) $k = 2^5 \cdot 3^3$, $d = \dots$;
 b) $k = 3^5 \cdot 5^3$, $d = \dots$;
 c) $k = 12^2$, $d = \dots$;
 d) $k = 12^3$, $d = \dots$.

239. Wiedząc, że $\binom{14}{4} = 1001$, $\binom{14}{5} = 2002$, $\binom{14}{6} = 3003$, podać wartość współczynnika dwumianowego

- a) $\binom{15}{5} = \dots$;
 b) $\binom{15}{6} = \dots$;
 c) $\binom{16}{6} = \dots$;
 d) $\binom{15}{10} = \dots$.

240. Dla podanej liczby n przyjąć za podstawę logarytmu $a = \sqrt[n]{n}$, a następnie zapisać liczbę $\log_a 2$ w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego

- a) $n = 2$, $\log_a 2 = \dots\dots\dots$;
- b) $n = 4$, $\log_a 2 = \dots\dots\dots$;
- c) $n = 8$, $\log_a 2 = \dots\dots\dots$;
- d) $n = 16$, $\log_a 2 = \dots\dots\dots$.

241. W dowolnym rosnącym postępie geometrycznym 10-wyrazowym, w którym wyrazy pierwszy, trzeci i czwarty tworzą (w tej właśnie kolejności) rosnący postęp arytmetyczny, także wyrazy m -ty, n -ty i k -ty tworzą (w tej właśnie kolejności) rosnący postęp arytmetyczny. Dla podanej jednej z liczb, podać dwie pozostałe tak, aby powyższe zdanie było prawdziwe.

- a) $m = 3$, $n = \dots\dots\dots$, $k = \dots\dots\dots$;
- b) $m = \dots\dots\dots$, $n = 5$, $k = \dots\dots\dots$;
- c) $m = 7$, $n = \dots\dots\dots$, $k = \dots\dots\dots$;
- d) $m = \dots\dots\dots$, $n = \dots\dots\dots$, $k = 10$.

242. Podać zbiór rozwiązań nierówności, zapisując go w postaci przedziału lub sumy przedziałów

- a) $|x^2 - 5| < 4 \dots\dots\dots$;
- b) $|x^2 - 9| < 16 \dots\dots\dots$;
- c) $|x^2 - 16| < 9 \dots\dots\dots$;
- d) $|x^2 - 25| < 24 \dots\dots\dots$.

243. Podać zbiór rozwiązań nierówności, zapisując go w postaci przedziału lub sumy przedziałów

- a) $(x-1)(x-2)(x-3) > 0 \dots\dots\dots$;
- b) $(x-1)(x-2)(x-3)^2 > 0 \dots\dots\dots$;
- c) $(x-1)(x-2)^2(x-3) > 0 \dots\dots\dots$;
- d) $(x-1)^2(x-2)(x-3) > 0 \dots\dots\dots$.

244. Na potrzeby tego zadania, dla liczby rzeczywistej $a > 1$ zdefiniujemy średnią liczb rzeczywistych x, y większych od 1, następującym wzorem

$$S_a(x, y) = a^{\sqrt{\log_a x \cdot \log_a y}}.$$

Podać wartości następujących liczb w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego w przypadku liczb wymiernych. Wpisać literkę **N** w przypadku liczb niewymiernych.

- a) $S_8(2, 16) = \dots\dots\dots$;
- b) $S_9(2, 16) = \dots\dots\dots$;
- c) $S_8(3, 81) = \dots\dots\dots$;
- d) $S_9(3, 81) = \dots\dots\dots$.