

245. Uporządkować podane liczby w kolejności niemalejącej.
 $\sin 50^\circ$, $\cos 80^\circ$, $\sin 170^\circ$, $\cos 200^\circ$, $\sin 250^\circ$, $\cos 280^\circ$.

246. Naszkicować wykres funkcji f zdefiniowanej wzorem

- a) $f(x) = \sin 2x$
- b) $f(x) = \cos 3x$
- c) $f(x) = \sin(x/2)$
- d) $f(x) = \sin^2 x$
- e) $f(x) = \cos^2 x$
- f) $f(x) = (1 + \cos 2x)/2$
- g) $f(x) = (1 - \cos 2x)/2$
- h) $f(x) = 3 + 5\cos x$
- i) $f(x) = \sin \pi x$

247. Która liczba jest większa?

- a) $\sin 1^\circ$ czy $\sin 1$
- b) $\sin 2^\circ$ czy $\sin 2$
- c) $\sin 3^\circ$ czy $\sin 3$
- d) $\sin 4^\circ$ czy $\sin 4$
- e) $\sin 5^\circ$ czy $\sin 5$
- f) $\sin 6^\circ$ czy $\sin 6$

248. Uprościć wyrażenie, w którym n przebiega liczby naturalne.

- a) $\sin n\pi$
- b) $\sin n^2\pi$
- c) $\cos n\pi$
- d) $\cos n^3\pi$
- e) $\cos(n^2 + n)\pi$
- f) $\sin((2n + 1)\pi/2)$
- g) $\sin((2n - 1)\pi/2)$

Dopuszczalne odpowiedzi: 1, 0, $(-1)^n$, $(-1)^{n+1}$.

249. Rozwiązać równania i nierówności.

- a) $\sin x \geq 1/2$
- b) $\cos x \leq 1/2$
- c) $\sin x \geq \cos x$
- d) $[4\sin^2 x] = 2$
- e) $\{\cos^2 x\} = 3/4$
- f) $\sqrt{1 + \cos x} = \sqrt{2} \cdot \cos(x/2)$
- g) $\sin^2 x + \cos^4 x = \cos^2 x + \sin^4 x$

250. Jaką najmniejszą i największą wartość przyjmuje wyrażenie

$$\sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x \cdot \cos 16x \text{ ?}$$

251. Czy funkcja f zdefiniowana podanym wzorem jest parzysta? Nieparzysta?

- a) $f(x) = 0$
- b) $f(x) = 37$
- c) $f(x) = 2x$
- d) $f(x) = 2x^2 + 1$
- e) $f(x) = 14x^5 + 6x^3$
- f) $f(x) = x^6 + x^5$
- g) $f(x) = \sin^{37} x \cdot \cos^{24} x$
- h) $f(x) = \sin^{24} x \cdot \cos^{37} x$
- i) $f(x) = x^{111} \cdot \sin^{24} x \cdot \cos^{37} x$
- j) $f(x) = x^{111} \cdot \sin^{37} x \cdot \cos^{24} x$
- k) $f(x) = x^{666} \cdot \sin^{24} x \cdot \cos^{37} x$
- l) $f(x) = x^{666} \cdot \sin^{37} x \cdot \cos^{24} x$
- m) $f(x) = \sin x^{37}$
- n) $f(x) = \sin x^{24}$
- o) $f(x) = \cos x^{37}$
- p) $f(x) = \cos x^{24}$
- q) $f(x) = (x^2 + 1) \sin x$
- r) $f(x) = (x^2 + 1) \cos x$
- s) $f(x) = (x^3 + 1) \sin x$
- t) $f(x) = (x^3 + 1) \cos x$

252. Dla każdej z liczb $i \in \{1, 2, \dots, 13\}$ wskazać taką liczbę $j \in \{1, 2, \dots, 13\}$, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x

$$f_j(f_i(x)) = x.$$

$$f_1(x) = 37 + x$$

$$f_2(x) = 37 - x$$

$$f_3(x) = x - 37$$

$$f_4(x) = 3x - 2$$

$$f_5(x) = 3x - 4$$

$$f_6(x) = 3x - 6$$

$$f_7(x) = \frac{x}{3} + 2$$

$$f_8(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}$$

$$f_9(x) = \frac{x}{3} + \frac{4}{3}$$

$$f_{10}(x) = -\frac{5}{4}x + \frac{3}{4}|x|$$

$$f_{11}(x) = -\frac{5}{4}x - \frac{3}{4}|x|$$

$$f_{12}(x) = \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}|x|$$

$$f_{13}(x) = \frac{5}{4}x - \frac{3}{4}|x|$$

253. Funkcja f spełnia warunki

$$f(3-x) = f(x), \quad f(6-x) = f(x)$$

dla dowolnej liczby rzeczywistej x . Dowieść, że funkcja f jest okresowa i parzysta.

254. Mając narysowany okrąg i jego środek, skonstruować kąt prosty przy użyciu samej linijki.

255. Punkt O jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Wiadomo, że

$$\sphericalangle AOB = \sphericalangle ACB + 60^\circ.$$

Wyznaczyć miarę kąta ACB .

256. To samo pytanie, gdy O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC .

257. W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku A ma miarę 30° , a boki AC i BC mają długości odpowiednio $\sqrt{3}$ oraz 1. Wyznaczyć długość boku AB .

258. W trapezie o wysokości 9 ramiona mają długości 15 i 41, a jedna z podstaw ma długość 60. Jaka jest długość drugiej podstawy?

259. Wyznaczyć wszystkie trójkąty prostokątne o bokach długości całkowitej, w których jedna z przyprostokątnych ma długość

- a) 7
- b) 9
- c) 12

260. Niech $0 < a \leq b \leq c$. Dokończyć i uzasadnić:

- a) Z odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkąt wtedy i tylko wtedy, gdy ...
- b) Z odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkąt prostokątny wtedy i tylko wtedy, gdy ...
- c) Z odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkąt rozwartokątny wtedy i tylko wtedy, gdy ...
- d) Z odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkąt ostrokątny wtedy i tylko wtedy, gdy ...
- e) Z odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkąt o jednym z kątów mającym miarę 120° wtedy i tylko wtedy, gdy ...
- f) Z odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkąt o jednym z kątów mającym miarę 60° wtedy i tylko wtedy, gdy ...

261. Dany jest taki czworokąt wypukły $ABCD$, że wierzchołki A i C , środek przekątnej BD oraz środki okręgów opisanych na trójkątach ABD i CBD leżą na jednej prostej. Udowodnić, że

$$AB^{2014} + BC^{2014} = AD^{2014} + DC^{2014}.$$

262. W trójkącie o bokach podanej długości wskazać kąt, którego miara wyrażona w stopniach jest liczbą całkowitą.

- a) 3, 4, 5
- b) 3, 5, 7
- c) 3, 7, 8

263. Poniższe warunki dotyczą czworokąta wypukłego. Połączyć je w pary warunków równoważnych.

- a) w czworokąt można wpisać okrąg
- b) na czworokącie można opisać okrąg
- c) czworokąt jest równoległobokiem
- d) czworokąt jest rombem
- e) czworokąt jest prostokątem
- f) sumy miar przeciwległych kątów są równe
- g) sumy długości przeciwległych boków są równe
- h) sumy kwadratów długości przeciwległych boków są równe
- i) przekątne są równej długości i dzielą się na połowy
- j) przekątne są prostopadłe i dzielą się na połowy
- k) przekątne są prostopadłe
- l) przekątne dzielą się na połowy

264. Pole dowolnego wielokąta o obwodzie p opisanego na okręgu o promieniu r jest równe S . Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

- a) $p = 12, r = 1, S = 6$
- b) $p = 16, r = 2, S = 18$
- c) $p = 20, r = 3, S = 30$
- d) $p = 24, r = 4, S = 50$
- e) $p = 28, r = 5, S = 70$

265. Jeśli w poprzednim zadaniu udzielił(a/e)ś 3 odpowiedzi TAK i 2 odpowiedzi NIE, rozwiąż je ponownie, tym razem poprawnie.

266. Czy istnieje czworokąt, którego boki mają długości (w podanej kolejności)

- a) 1, 3, 10, 15
- b) 2, 4, 10, 15
- c) 3, 27, 10, 15
- d) 4, 30, 10, 15

267. Wyznaczyć położenie punktów styczności okręgu wpisanego w trójkąt o bokach 3, 4, 5 do boków tego trójkąta.

268. Trzy kolejne boki wielokąta opisanego na okręgu mają długości a, b, c (z zachowaniem kolejności). Jaki warunek muszą spełniać a, b, c , aby było to możliwe?

269. Na okręgu opisano pięciokąt o bokach 3, 4, 5, 6, 7 (w tej kolejności). Wyznaczyć położenie punktów styczności okręgu do boków pięciokąta.

270. Pięć kolejnych boków wielokąta opisanego na okręgu ma długości a, b, c, d, e (z zachowaniem kolejności). Wykazać, że wówczas

$$b + d < a + c + e.$$

271. Wykazać, że dla sześciokąta o bokach a, b, c, d, e, f (z zachowaniem kolejności) równość

$$a + c + e = b + d + f$$

jest warunkiem (koniecznym/dostatecznym)¹ na to, aby w sześciokąt można było wpisać okrąg. Pokazać na przykładzie, że nie jest to warunek (konieczny/dostateczny)¹.

272. Dany jest dwunastokąt foremny $A_1A_2A_3\dots A_{12}$. Dla podanych dwóch przekątnych wskazać trzecią przekątną przechodzącą przez ich punkt przecięcia.

a) A_1A_7, A_3A_9

b) A_1A_5, A_2A_8

c) A_1A_5, A_3A_7

d) A_1A_6, A_4A_9

273. Dany jest jedenastokąt foremny $A_1A_2A_3\dots A_{11}$. Połączyć podane czworokąty w pary czworokątów przystających

a) $A_1A_2A_4A_9$

b) $A_1A_3A_7A_{11}$

c) $A_1A_4A_{10}A_{11}$

d) $A_1A_6A_9A_{10}$

e) $A_1A_4A_6A_{11}$

f) $A_1A_2A_3A_9$

g) $A_1A_6A_8A_{11}$

h) $A_1A_3A_4A_8$

Które czworokąty mają równe pola?

274. Dla których liczb naturalnych $n \geq 3$ poniższe zdanie jest prawdziwe

a) Dowolny n -kąt wpisany w okrąg i mający wszystkie boki równej długości jest foremny.

b) Dowolny n -kąt wpisany w okrąg i mający wszystkie kąty równej miary jest foremny.

c) Dowolny n -kąt opisany na okręgu i mający wszystkie boki równej długości jest foremny.

d) Dowolny n -kąt opisany na okręgu i mający wszystkie kąty równej miary jest foremny.

275. Na płaszczyźnie dany jest trójkąt ABC . Ile co najwyżej może istnieć takich punktów D różnych od C , że proste AB i CD są prostopadłe, a przy tym

$$\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB ?$$

¹niepotrzebne skreślić

Powtórka

Kolokwia nr 4 (27 stycznia 2014) i 5 (3 lutego 2014) będą zakładać umiejętność rozwiązania zadań 1–434 oraz umiejętność samodzielnego myślenia.

Odpowiedzi do zadań 280–434 znajdują się na liście 4o.

276. Dla każdej z liczb $n = 1, 2, 3, \dots, 23$ rozstrzygnąć, czy liczby $\sin n$ oraz $\cos n$ są dodatnie.

277. Udowodnić podaną nierówność dla odpowiednio dobranej liczby naturalnej $n > 1$.

- a) $n^{1000} < 2^n$
- b) $1000^n < n!$
- c) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > 1000$
- d) $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n} > 1000n$

278. Niech

$$f(x) = \left| \left[x + \frac{1}{2} \right] - x \right|.$$

Naszkicować wykres funkcji f oraz wykresy następujących funkcji

- a) $f_1(x) = f(2x)$
- b) $f_2(x) = f(x/2)$
- c) $f_3(x) = 2f(x)$
- d) $f_4(x) = f\left(x + \frac{1}{4}\right)$
- e) $f_5(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right)$
- f) $f_6(x) = f\left(x - \frac{1}{2}\right)$
- g) $f_7(x) = \frac{1}{2} - f(x)$
- h) $f_8(x) = f\left(\left|x - \frac{1}{4}\right|\right)$
- i) $f_9(x) = \left|f\left(x - \frac{1}{4}\right)\right|$
- j) $f_{10}(x) = \frac{f(2x)}{2}$
- k) $f_{11}(x) = f(x) + x$
- l) $f_{12}(x) = 5f(x) + 3x$

279. Naszkicować wykres funkcji f zdefiniowanej podanym wzorem

- a) $f(x) = 1 + \frac{1}{x-1}$
- b) $f(x) = \frac{x}{x-1}$
- c) $f(x) = 2 + \frac{1}{x+3}$
- d) $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$

- e) $f(x) = 1 - \frac{1}{|x|}$
 f) $f(x) = 1 - \frac{1}{x-2}$
 g) $f(x) = 1 - \frac{1}{|x|-2}$
 h) $f(x) = 1 - \frac{1}{|x-2|}$
 i) $f(x) = \left| 1 - \frac{1}{x-2} \right|$
 j) $f(x) = \left| 1 - \frac{1}{|x|-2} \right|$
 k) $f(x) = \left| 1 - \frac{1}{|x-2|} \right|$

280. Czy liczba $\log_n(n-24)$ jest wymierna dla

- a) $n = 25$;
 b) $n = 27$;
 c) $n = 32$;
 d) $n = 49$?

281. Dla dowolnej liczby naturalnej k liczba k^2 jest podzielna przez m wtedy i tylko wtedy, gdy liczba k^2 jest podzielna przez n . Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

- a) $m = 4, n = 8$;
 b) $m = 3, n = 9$;
 c) $m = 8, n = 16$;
 d) $m = 9, n = 27$?

282. Czy równość $\cos \alpha = \sin(4\alpha)$ jest prawdziwa dla

- a) $\alpha = 18^\circ$;
 b) $\alpha = 24^\circ$;
 c) $\alpha = 30^\circ$;
 d) $\alpha = 45^\circ$?

283. Dla dowolnej liczby naturalnej k liczba k jest podzielna przez $(n+1)!$ wtedy i tylko wtedy, gdy liczba k jest podzielna przez $n!$ i przez $n+1$. Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

- a) $n = 10$;
 b) $n = 11$;
 c) $n = 14$;
 d) $n = 16$?

284. Czy podana liczba jest podzielna przez 2^{100}

- a) $1234567890987654321160^{35}$;
- b) $1234567890987654321222^{65}$;
- c) $1234567890987654321100^{45}$;
- d) $1234567890987654321036^{55}$?

285. Czy prawdziwa jest nierówność

- a) $\sqrt{10} - 3 < 1/6$;
- b) $\sqrt{17} - 4 < 1/6$;
- c) $\sqrt{26} - 5 < 1/11$;
- d) $\sqrt{37} - 6 < 1/11$?

286. Czy prawdziwa jest nierówność

- a) $11111^2 + 22222^2 < 4 \cdot 11111^2$;
- b) $11111^3 + 22222^3 < 9 \cdot 11111^3$;
- c) $11111^4 + 22222^4 < 25 \cdot 11111^4$;
- d) $11111^5 + 22222^5 < 27 \cdot 11111^5$?

287. Czy nierówność $\log_a 2 < \log_a 3$ jest prawdziwa dla

- a) $a = \log_2 3$;
- b) $a = \log_3 2$;
- c) $a = \sqrt{5} - 1$;
- d) $a = \sqrt{3} - 1$?

288. Czy równość $2^m \cdot 4^n = 8^{m+n}$ jest prawdziwa dla

- a) $m = 1, n = 2$;
- b) $m = 2, n = -4$;
- c) $m = 3, n = 3$;
- d) $m = 4, n = -2$?

289. Czy liczba $(x^x)^x$ jest wymierna dla

- a) $x = \sqrt{2}$;
- b) $x = \sqrt{3}$;
- c) $x = \sqrt{5}$;
- d) $x = \sqrt{6}$?

290. Czy nierówność $12x < x^2 + 32$ jest prawdziwa dla podanej liczby x (pierwiastek jest w wykładniku)

- a) $x = 2^{\sqrt{3}}$;
- b) $x = 2^{\sqrt{5}}$;
- c) $x = 2^{\sqrt{7}}$;
- d) $x = 2^{\sqrt{11}}$?

291. Liczby rzeczywiste x, y spełniają nierówność $|x - y| < 1$. Czy stąd wynika, że

- a) $|2x + 2y| < 10$;
- b) $|3x - 2y| < 10$;
- c) $|x + y| < 10$;
- d) $|2x - 2y| < 10$?

292. Deltoidem nazywamy dowolny czworokąt wypukły, w którym przekątne są prostopadłe, a jedna z nich dzieli drugą na połowy (ale druga pierwszej już nie musi). Czy stąd wynika, że

- a) w dowolny deltoid można wpisać okrąg;
- b) na dowolnym deltoidzie można opisać okrąg;
- c) w dowolnym deltoidzie istnieją dwa przeciwległe boki równej długości;
- d) w dowolnym deltoidzie istnieją dwa sąsiednie boki równej długości?

293. Czy nierówność

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^m < \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

jest prawdziwa dla

- a) $m = 2007, n = 2008$;
- b) $m = 2007, n = 2009$;
- c) $m = 2008, n = 2009$;
- d) $m = 2008, n = 2010$?

294. Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = \left| \{x\} - \frac{1}{2} \right|,$$

gdzie $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x . Czy stąd wynika, że

- a) funkcja f jest parzysta;
- b) funkcja f jest nieparzysta;
- c) funkcja f jest okresowa;
- d) funkcja f jest różnowartościowa?

295. Czy istnieje taka liczba naturalna n , że liczba n^5

- a) jest podzielna przez 2^4 , ale nie jest podzielna przez 2^6 ;
- b) jest podzielna przez 2^6 , ale nie jest podzielna przez 2^9 ;
- c) jest podzielna przez 4^7 , ale nie jest podzielna przez 4^8 ;
- d) jest podzielna przez 8^7 , ale nie jest podzielna przez 8^8 ?

296. Liczby rzeczywiste x, y spełniają nierówność $x^2 + y^2 < 1$. Czy stąd wynika, że

- a) $x + y > 0$;
- b) $x + y < 1$;
- c) $x + y > 2$;
- d) $x + y < 2$?

297. Czy w czworokąt wypukły o bokach podanej długości (z zachowaniem kolejności) można wpisać okrąg

- a) 11, 5, 2, 10;
- b) 11, 2, 2, 11;
- c) 11, 5, 4, 10;
- d) 11, 4, 5, 10?

298. Czy w czworokącie wypukłym o bokach podanej długości (z zachowaniem kolejności) przekątne są prostopadłe

- a) 11, 5, 2, 10;
- b) 11, 2, 2, 11;
- c) 11, 5, 4, 10;
- d) 11, 4, 5, 10?

299. Czy równość $|\sin \alpha| = |\sin 4\alpha|$ jest prawdziwa dla

- a) $\alpha = 30^\circ$;
- b) $\alpha = 36^\circ$;
- c) $\alpha = 45^\circ$;
- d) $\alpha = 60^\circ$?

300. Czy równość $|\cos \alpha| = |\cos 4\alpha|$ jest prawdziwa dla

- a) $\alpha = 30^\circ$;
- b) $\alpha = 36^\circ$;
- c) $\alpha = 45^\circ$;
- d) $\alpha = 60^\circ$?

301. Czy istnieje taki trójkąt ABC wpisany w okrąg o środku O , że

- a) $\sphericalangle ABC = 70^\circ$, $\sphericalangle AOC = 140^\circ$;
- b) $\sphericalangle ABC = 80^\circ$, $\sphericalangle AOC = 160^\circ$;
- c) $\sphericalangle ABC = 100^\circ$, $\sphericalangle AOC = 150^\circ$;
- d) $\sphericalangle ABC = 110^\circ$, $\sphericalangle AOC = 140^\circ$?

302. Dany jest 12-kąt foremny $A_1A_2A_3\dots A_{11}A_{12}$. Czy podany sześciokąt jest równokątny

- a) $A_1A_3A_5A_7A_9A_{11}$;
- b) $A_1A_2A_5A_6A_9A_{10}$;
- c) $A_1A_4A_5A_6A_9A_{12}$;
- d) $A_1A_4A_5A_8A_9A_{12}$?

303. Czy prawdziwa jest nierówność

- a) $\log_{0,2} 0,4 < 2$;
- b) $\log_{0,3} 0,9 < 2$;
- c) $\log_{0,4} 0,2 < 2$;
- d) $\log_{0,9} 0,3 < 2$?

304. Czy prawdziwa jest nierówność

- a) $\cos 10^\circ < \log_2 3$;
- b) $\cos 60^\circ < \log_{10} 3$;
- c) $\cos 110^\circ < \log_3 2$;
- d) $\cos 160^\circ < \log_3 10$?

305. Czy nierówność

$$\left(2^{2^n}\right)^{2^{2^n}} < 16^{16^n}$$

jest prawdziwa dla

- a) $n = 1$;
- b) $n = 2$;
- c) $n = 3$;
- d) $n = 4$?

306. Czy nierówność

$$n^{2^{16}} < 16^n$$

jest prawdziwa dla

- a) $n = 2^{16}$;
- b) $n = 2^{17}$;
- c) $n = 2^{18}$;
- d) $n = 2^{19}$?

307. Czy istnieje liczba naturalna o sumie cyfr równej 66, podzielna przez

- a) 5;
- b) 8;
- c) 9;
- d) 12?

308. Czy istnieje liczba naturalna o dwucyfrowej końcówce 66, podzielna przez

- a) 4;
- b) 5;
- c) 9;
- d) 18?

309. Czy istnieją liczby całkowite dodatnie m, n , których największy wspólny dzielnik $\text{NWD}(m, n)$ jest mniejszy od liczby n o

- a) 25%;
- b) 40%;
- c) 75%;
- d) 80%?

310. Czy istnieją liczby całkowite dodatnie m, n , których najmniejsza wspólna wielokrotność $\text{NWW}(m, n)$ jest większa od liczby n o

- a) 250%;
- b) 400%;
- c) 750%;
- d) 800%?

311. Czy podana liczba jest sześcianem liczby całkowitej

- a) $24^{10} \cdot 9^{11}$;
- b) $24^{11} \cdot 9^{12}$;
- c) $24^{12} \cdot 9^{21}$;
- d) $24^{13} \cdot 9^{22}$?

312. Czy dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y spełniających warunek $x^6 = y^6$, zachodzi równość

- a) $x^3 = y^3$;
- b) $x^4 = y^4$;
- c) $x^5 = y^5$;
- d) $x^{14} = y^{14}$?

313. Niech $a = \log_x y$ oraz $b = \log_y x$. Czy nierówność

$$\log_a b < \log_b a$$

jest prawdziwa, jeżeli

- a) $x = 2^{16}$, $y = 2^{32}$;
- b) $x = 3^{27}$, $y = 3^{81}$;
- c) $x = 5^{625}$, $y = 5^{125}$;
- d) $x = 7^{343}$, $y = 7^{49}$?

314. Czy wśród wierzchołków n -kąta foremnego istnieje k wierzchołków będących wierzchołkami k -kąta foremnego, jeżeli

- a) $n = 2013$, $k = 3$;
- b) $n = 2014$, $k = 4$;
- c) $n = 2015$, $k = 5$;
- d) $n = 2016$, $k = 6$?

315. Czy wysokości trójkąta przecinają się wewnątrz trójkąta, którego pewne dwa kąty mają miary

- a) 11° i 33° ;
- b) 33° i 55° ;
- c) 55° i 77° ;
- d) 77° i 99° ?

316. Czy symetralne boków trójkąta przecinają się wewnątrz trójkąta, którego pewne dwa kąty mają miary

- a) 11° i 33° ;
- b) 33° i 55° ;
- c) 55° i 77° ;
- d) 77° i 99° ?

317. Czy równość $\cos(2\alpha) = \sin(7\alpha)$ jest prawdziwa dla

- a) $\alpha = 6^\circ$;
- b) $\alpha = 10^\circ$;
- c) $\alpha = 15^\circ$;
- d) $\alpha = 18^\circ$?

318. Czy miara kąta wewnętrznego n -kąta foremnego wyrażona w stopniach jest liczbą całkowitą, jeżeli

- a) $n = 40$;
- b) $n = 45$;
- c) $n = 54$;
- d) $n = 60$?

319. Czy liczba n^n jest kwadratem liczby naturalnej, jeżeli

- a) $n = 48$;
- b) $n = 49$;
- c) $n = 50$;
- d) $n = 51$?

320. Czy liczba n^n jest sześcianem liczby naturalnej, jeżeli

- a) $n = 123$;
- b) $n = 124$;
- c) $n = 125$;
- d) $n = 126$?

321. Czy równość $(\sqrt{x^2} + x)^{2011} = (\sqrt{x^2} + x)^{2012}$ jest prawdziwa dla

- a) $x = \sqrt{77} - 7$;
- b) $x = \sqrt{77} - 8$;
- c) $x = \sqrt{77} - 9$;
- d) $x = \sqrt{77} - 10$?

322. Czy równość $(\sqrt{x^2} + x)^{2011} = (\sqrt{x^2} + x)^{2012}$ jest prawdziwa dla

- a) $x = 1 - \log_4 2$;
- b) $x = 2 - \log_4 8$;
- c) $x = 3 - \log_4 12$;
- d) $x = 5 - \log_4 20$?

323. Czy dla podanej liczby p istnieją dwie liczby całkowite dodatnie, z których jedna jest większa od drugiej o $p\%$, a ponadto obydwie te liczby są kwadratami liczb naturalnych?

- a) $p = 21$;
- b) $p = 50$;
- c) $p = 800$;
- d) $p = 900$.

324. Czy dla podanej liczby p istnieją dwie liczby całkowite dodatnie, z których jedna jest mniejsza od drugiej o $p\%$, a ponadto obydwie te liczby są kwadratami liczb naturalnych?

- a) $p = 25$;
- b) $p = 50$;
- c) $p = 75$;
- d) $p = 99$.

325. Czy istnieje trójkąt rozwartokątny o bokach długości

- a) 4, 5, 7;
- b) 4, 5, 10;
- c) 5, 5, 7;
- d) 6, 8, 10?

326. Dla dowolnej liczby naturalnej k liczba k^2 jest dzielnikiem liczby 5^m wtedy i tylko wtedy, gdy jest dzielnikiem liczby 5^n . Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

- a) $m = 4$, $n = 5$;
- b) $m = 5$, $n = 6$;
- c) $m = 9$, $n = 10$;
- d) $m = 10$, $n = 11$?

327. Iloczyn liczb całkowitych dodatnich m , n jest równy k . Czy stąd wynika, że suma $m+n$ jest nieparzysta, jeżeli

- a) $k = 2010$;
- b) $k = 2011$;
- c) $k = 2012$;
- d) $k = 2013$?

328. Iloczyn liczb całkowitych dodatnich m , n jest równy k . Czy stąd wynika, że suma $m+n$ jest parzysta, jeżeli

- a) $k = 2020$;
- b) $k = 2021$;
- c) $k = 2022$;
- d) $k = 2023$?

329. Czy nierówność $\binom{n}{50} < \binom{n}{100}$ jest prawdziwa dla

- a) $n = 127$;
- b) $n = 144$;
- c) $n = 169$;
- d) $n = 196$?

330. Czy trójkąt, w którym pewne dwa kąty mają miary odpowiednio α i 7α , jest równoramienny, jeżeli

- a) $\alpha = 12^\circ$;
- b) $\alpha = 15^\circ$;
- c) $\alpha = 18^\circ$;
- d) $\alpha = 20^\circ$?

331. Czy nierówność $\log_4 x < \log_8 y$ jest prawdziwa dla

- a) $x = 3, \quad y = 5$;
- b) $x = 20, \quad y = 90$;
- c) $x = 10, \quad y = 30$;
- d) $x = 30, \quad y = 200$?

332. Czy nierówność $\log_x y < \log_y x$ jest prawdziwa dla

- a) $x = 2, \quad y = 3$;
- b) $x = 0,2, \quad y = 0,3$;
- c) $x = 7, \quad y = 5$;
- d) $x = 0,7, \quad y = 0,5$?

333. Czy nierówność $\log_x y < -1$ jest prawdziwa dla

- a) $x = 0,2, \quad y = 6$;
- b) $x = 0,3, \quad y = 3$;
- c) $x = 0,4, \quad y = 4$;
- d) $x = 0,5, \quad y = 2$?

334. Cena patisonów spadła o $p\%$, a następnie wzrosła o $q\%$. Czy po tych dwóch zmianach cen, cena patisonów jest wyższa niż przed zmianami, jeżeli

- a) $p = 20, \quad q = 25$;
- b) $p = 25, \quad q = 34$;
- c) $p = 33, \quad q = 50$;
- d) $p = 50, \quad q = 90$?

335. Dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y spełniających warunek $x^k = y^k$ zachodzi równość $x^n = y^n$. Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

- a) $k = 10, \quad n = 7$;
- b) $k = 21, \quad n = 13$;
- c) $k = 14, \quad n = 76$;
- d) $k = 22, \quad n = 77$?

336. Czy w dowolnym postępie arytmetycznym 10-wyrazowym $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}$ zachodzi równość

- a) $a_1 + a_7 = 2a_4$;
- b) $a_4 + a_8 = 2a_6$;
- c) $a_4 + a_9 = 2a_7$;
- d) $a_2 + a_{10} = 2a_6$?

337. Czy równość $\sin \alpha = \sin(\alpha + 100^\circ)$ jest prawdziwa dla

- a) $\alpha = 30^\circ$;
- b) $\alpha = 40^\circ$;
- c) $\alpha = 45^\circ$;
- d) $\alpha = 60^\circ$?

338. Dla dowolnej liczby naturalnej n , liczba n jest podzielna przez iloczyn pqr wtedy i tylko wtedy, gdy n jest podzielna przez p , n jest podzielna przez q i n jest podzielna przez r . Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

- a) $p = 10, \quad q = 13, \quad r = 16$;
- b) $p = 11, \quad q = 14, \quad r = 17$;
- c) $p = 25, \quad q = 27, \quad r = 32$;
- d) $p = 49, \quad q = 50, \quad r = 63$?

339. Czy dowolna liczba naturalna o sumie cyfr równej 75 jest podzielna przez

- a) 3;
- b) 5;
- c) 9;
- d) 25?

340. Czy dowolna liczba naturalna o dwucyfrowej końcówce 75 jest podzielna przez

- a) 3;
- b) 5;
- c) 9;
- d) 25?

341. Czy dla podanej liczby q istnieje taka liczba pierwsza p oraz taka liczba całkowita dodatnia n , że liczba p jest mniejsza o $q\%$ od liczby n^2 .

- a) $q = 89$;
- b) $q = 88$;
- c) $q = 86$;
- d) $q = 25$?

342. Czy w dowolnym postępie geometrycznym $a_1, a_2, a_3, \dots$ zachodzi równość

- a) $a_1 \cdot a_{11} = a_6^2$;
- b) $a_2 \cdot a_{15} = a_8^2$;
- c) $a_3 \cdot a_{19} = a_{10}^2$;
- d) $a_4 \cdot a_{20} = a_{12}^2$?

343. Czy istnieje n -kąąt wypukły, w którym każdy kąt wewnętrzny ma miarę 90° lub 150° , jeżeli

- a) $n = 6$;
- b) $n = 9$;
- c) $n = 10$;
- d) $n = 12$?

344. Czy istnieje n -kąąt wypukły, w którym każdy kąt wewnętrzny ma miarę 150° lub 170° , jeżeli

- a) $n = 12$;
- b) $n = 15$;
- c) $n = 22$;
- d) $n = 40$?

345. Czy nierówność $2x^2 + 3 < 5x$ jest prawdziwa dla

- a) $x = \log_2 3$;
- b) $x = \log_3 5$;
- c) $x = \log_4 7$;
- d) $x = \log_5 11$?

346. Czy liczba $\log_3 4^x \cdot \log_8 9^y$ jest całkowita, jeżeli

- a) $x = 25, y = 16$;
- b) $x = 27, y = 25$;
- c) $x = 32, y = 33$;
- d) $x = 49, y = 44$?

347. Czy podana nierówność jest prawdziwa

- a) $5^{\log_2 7} < 7^{\log_2 6}$;
- b) $7^{\log_3 11} < 10^{\log_3 7}$;
- c) $13^{\log_5 11} < 11^{\log_5 12}$;
- d) $17^{\log_7 13} < 14^{\log_7 17}$?

348. Czy funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona podanym wzorem spełnia warunek $f(f(x)) = x$ dla dowolnej liczby rzeczywistej x

a) $f(x) = -\frac{5}{3}x + \frac{4}{3}|x|$;

b) $f(x) = -\frac{5}{3}x - \frac{4}{3}|x|$;

c) $f(x) = \frac{5}{3}x + \frac{4}{3}|x|$;

d) $f(x) = \frac{5}{3}x - \frac{4}{3}|x|$?

349. Czy istnieje trójkąt rozwartokątny o bokach długości

a) 30, 40, 43;

b) 30, 40, 50;

c) 30, 40, 61;

d) 30, 40, 73?

350. Czy istnieje taka liczba całkowita dodatnia n oraz takie jej dzielniki d_1, d_2 , że d_1 jest większy od d_2

a) o 37%;

b) o 200%;

c) o 1300%;

d) o 1313%?

351. Czy nierówność $\binom{n}{k} < \binom{n}{2k}$ jest prawdziwa dla

a) $n = 20, k = 6$;

b) $n = 30, k = 10$;

c) $n = 40, k = 13$;

d) $n = 50, k = 17$?

352. Czy równość $\sqrt{m^2} = m$, gdzie $m = n^n$, jest prawdziwa dla

a) $n = 3^{41} - 5^{28}$;

b) $n = 2^{41} - 3^{28}$;

c) $n = 3^{43} - 5^{28}$;

d) $n = 2^{41} - 3^{24}$?

353. Czy równość $\cos 4\alpha = \sin 14\alpha$ jest prawdziwa dla

a) $\alpha = 5^\circ$;

b) $\alpha = 9^\circ$;

c) $\alpha = 10^\circ$;

d) $\alpha = 12^\circ$?

354. Dane są takie liczby całkowite k, m, n , że iloczyn kmn jest podzielny przez $2^{10} \cdot 3^{20} \cdot 5^{30}$. Czy stąd wynika, że co najmniej jedna z liczb k, m, n jest podzielna przez

- a) 2^5 ;
- b) 3^7 ;
- c) 5^{11} ;
- d) $3^6 \cdot 5^{10}$?

355. Czy nierówność $x^2 + 3 < 4x$ jest prawdziwa dla

- a) $x = \log_2 7$;
- b) $x = \log_3 29$;
- c) $x = \log_5 127$;
- d) $x = \log_4 61$?

356. Czy nierówność $\log_a b < \log_c d$ jest prawdziwa, jeżeli $a = 2^{3^x}$, $b = 2^{3^y}$, $c = 2^{3^z}$, $d = 2^{3^t}$, gdzie

- a) $x = 10$, $y = 20$, $z = 12$, $t = 24$;
- b) $x = 24$, $y = 48$, $z = 5$, $t = 10$;
- c) $x = 14$, $y = 7$, $z = 30$, $t = 15$;
- d) $x = 15$, $y = 10$, $z = 21$, $t = 14$?

357. Czy prawdziwa jest nierówność

- a) $2^{\log_5 3} < 3^{\log_7 2}$;
- b) $3^{\log_7 5} < 5^{\log_2 3}$;
- c) $5^{\log_2 7} < 7^{\log_3 5}$;
- d) $7^{\log_3 2} < 2^{\log_5 7}$?

358. Przypomnienie: zakładamy, że wyrazy postępu geometrycznego są różne od zera.

Czy iloczyn wyrazów dowolnego postępu geometrycznego n -wyrazowego jest dodatni, jeżeli

- a) $n = 2013$;
- b) $n = 2014$;
- c) $n = 2015$;
- d) $n = 2016$?

359. Czy istnieją dwa kwadraty liczb całkowitych dodatnich, z których jeden jest większy od drugiego o

- a) 64%;
- b) 125%;
- c) 800%;
- d) 6300%?

360. Czy istnieją dwa sześciany liczb całkowitych dodatnich, z których jeden jest większy od drugiego o

- a) 64%;
- b) 125%;
- c) 800%;
- d) 6300%?

361. W dowolnym postępie arytmetycznym 2013-wyrazowym wyrazy m -ty, n -ty, k -ty tworzą (w tej właśnie kolejności) trójwyrazowy postęp arytmetyczny. Czy powyższe zdanie jest prawdziwe, jeżeli

- a) $m = 1, \quad n = 5, \quad k = 9$;
- b) $m = 1, \quad n = 3, \quad k = 9$;
- c) $m = 9, \quad n = 15, \quad k = 25$;
- d) $m = 9, \quad n = 17, \quad k = 25$?

362. W dowolnym postępie geometrycznym 2013-wyrazowym wyrazy m -ty, n -ty, k -ty tworzą (w tej właśnie kolejności) trójwyrazowy postęp geometryczny. Czy powyższe zdanie jest prawdziwe, jeżeli

- a) $m = 1, \quad n = 5, \quad k = 9$;
- b) $m = 1, \quad n = 3, \quad k = 9$;
- c) $m = 9, \quad n = 15, \quad k = 25$;
- d) $m = 9, \quad n = 17, \quad k = 25$?

363. Czy równość $\cos \alpha = \sin(2\alpha + 30^\circ)$ jest prawdziwa dla

- a) $\alpha = 20^\circ$;
- b) $\alpha = 30^\circ$;
- c) $\alpha = 45^\circ$;
- d) $\alpha = 60^\circ$?

364. Czy istnieje trójkąt o bokach podanej długości i jednym z kątów miary większej od 120°

- a) 30, 50, 69;
- b) 30, 50, 73;
- c) 30, 50, 77;
- d) 30, 50, 81?

365. Czy istnieje taki sześciokąt równokątny $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ wpisany w okrąg, że $A_1A_2 = 10$, a ponadto

- a) $A_2A_3 = 9$;
- b) $A_3A_4 = 11$;
- c) $A_4A_5 = 100$;
- d) $A_5A_6 = 1$?

366. Czy istnieje taki siedmiokąt równokątny $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ wpisany w okrąg, że $A_1A_2 = 10$, a ponadto

- a) $A_2A_3 = 9$;
- b) $A_3A_4 = 11$;
- c) $A_4A_5 = 100$;
- d) $A_5A_6 = 1$?

367. Funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia dla każdej liczby rzeczywistej x warunek

$$f(x) = f(10+x) = f(-x).$$

Czy stąd wynika, że

- a) $f(1) = f(6)$;
- b) $f(2) = f(8)$;
- c) $f(3) = f(28)$;
- d) $f(4) = f(36)$?

368. Punkt D jest środkiem boku AB trójkąta ABC . Czy środek okręgu opisanego na trójkącie ABC leży na prostej CD , jeżeli

- a) $AB = 5$, $BC = 4$, $AC = 3$;
- b) $AB = 5$, $BC = 4$, $AC = 4$;
- c) $AB = 5$, $BC = 5$, $AC = 4$;
- d) $AB = 5$, $BC = 3$, $AC = 3$?

369. Czy istnieją dwa kwadraty liczb całkowitych dodatnich, z których jeden jest mniejszy od drugiego o

- a) 25%;
- b) 36%;
- c) 64%;
- d) 84%?

370. Czy prawdziwa jest podana równość, gdzie $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x

- a) $\{\log_2 3\} = \{\log_2 12\}$;
- b) $\{\log_2 5\} = \{\log_2 13\}$;
- c) $\{\log_2 7\} = \{\log_2 14\}$;
- d) $\{\log_2 9\} = \{\log_2 15\}$?

371. W dowolnym postępie geometrycznym 2013-wyrazowym wyrazy m -ty, n -ty, k -ty tworzą (w tej właśnie kolejności) trójwyrazowy postęp geometryczny. Czy powyższe zdanie jest prawdziwe, jeżeli

- a) $m = 2, \quad n = 4, \quad k = 6$;
- b) $m = 2, \quad n = 4, \quad k = 8$;
- c) $m = 2, \quad n = 5, \quad k = 8$;
- d) $m = 1, \quad n = 5, \quad k = 25$?

372. Czy równość $\cos(3\alpha) = \sin(12\alpha)$ jest prawdziwa dla

- a) $\alpha = 6^\circ$;
- b) $\alpha = 8^\circ$;
- c) $\alpha = 10^\circ$;
- d) $\alpha = 12^\circ$?

373. Czy suma cyfr podanej liczby (po zapisaniu w systemie dziesiętnym) jest podzielna przez 9

- a) 2013^{2013} ;
- b) 2014^{2014} ;
- c) 2015^{2015} ;
- d) 2016^{2016} ?

374. Dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich m, n , jeżeli liczba d jest podzielna przez iloczyn mn , to liczba d jest także podzielna przez co najmniej jeden z czynników m, n . Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

- a) $d = 46$;
- b) $d = 47$;
- c) $d = 48$;
- d) $d = 49$?

375. Przyjmujemy, że w wielokącie wypukłym każdy kąt ma miarę dodatnią mniejszą od 180° .

Czy istnieje czworokąt wypukły, w którym liczba kątów rozwartych jest równa

- a) 0;
- b) 1;
- c) 3;
- d) 4?

376. Czy istnieje pięciokąt wypukły, w którym liczba kątów rozwartych jest równa

- a) 0;
- b) 1;
- c) 2;
- d) 3?

377. Dany jest piętnastokąt foremny $A_1A_2A_3\dots A_{15}$. Niech $P(ABC)$ oznacza pole trójkąta ABC . Czy wtedy

- a) $P(A_1A_2A_9) < P(A_1A_2A_{10})$;
- b) $P(A_1A_3A_8) < P(A_1A_3A_9)$;
- c) $P(A_1A_4A_9) < P(A_1A_4A_{13})$;
- d) $P(A_1A_4A_{10}) < P(A_1A_6A_{11})$?

378. Czy istnieje trapez o wysokości 12 i ramionach długości 15 i 20, którego długości podstaw różnią się o

- a) 7;
- b) 9;
- c) 16;
- d) 25?

379. Czy istnieje dwunastokąt równokątny $A_1A_2A_3\dots A_{12}$ wpisany w okrąg o promieniu 10, mający co najmniej jeden bok długości

- a) 1;
- b) 9;
- c) 11;
- d) 15?

380. Czy istnieje ośmiokąt równokątny $A_1A_2A_3\dots A_8$ wpisany w okrąg o promieniu 10, mający co najmniej jeden bok długości

- a) 1;
- b) 9;
- c) 11;
- d) 15?

381. Obliczyć wartości podanych wyrażeń. $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x .

- a) $\left[\log_2 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{64} \right) \right] = \dots$;
 b) $\left[\log_2 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{128} \right) \right] = \dots$;
 c) $\left[\log_2 (\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7} + \sqrt{10}) \right] = \dots$;
 d) $\left[\log_3 (\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7} + \sqrt{10}) \right] = \dots$.

382. Podać wartość logarytmu $\log_a b$ w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego, jeżeli $b = \sqrt{2}$ oraz

- a) $a = \sqrt[4]{4}$, $\log_a b = \dots$;
 b) $a = \sqrt[8]{8}$, $\log_a b = \dots$;
 c) $a = \sqrt[16]{16}$, $\log_a b = \dots$;
 d) $a = \sqrt[32]{32}$, $\log_a b = \dots$.

383. Dany jest 13-kąt foremny $A_1 A_2 A_3 \dots A_{13}$. Dla podanych i, j wskazać taką liczbę k , że trójkąt $A_i A_j A_k$ jest trójkątem równoramiennym ostrokątnym

- a) $i = 1, j = 2, k = \dots$;
 b) $i = 1, j = 5, k = \dots$;
 c) $i = 1, j = 6, k = \dots$;
 d) $i = 1, j = 7, k = \dots$.

384. Podać zbiór rozwiązań nierówności w liczbach rzeczywistych $x \in [0, \pi]$

- a) $\sin x < 1/2$;
 b) $\sin x < \cos x$;
 c) $\sin x < \sin 2x$;
 d) $\cos x < \sin 2x$

385. Podać przykład takich liczb naturalnych m, n , że

$$\text{NWD}(m, n) < m < n < \text{NWW}(m, n),$$

a ponadto

- a) $\text{NWD}(m, n) = 1$, $\text{NWW}(m, n) = 15$, $m = \dots$ $n = \dots$;
 b) $\text{NWD}(m, n) = 2$, $\text{NWW}(m, n) = 24$, $m = \dots$ $n = \dots$;
 c) $\text{NWD}(m, n) = 3$, $\text{NWW}(m, n) = 36$, $m = \dots$ $n = \dots$;
 d) $\text{NWD}(m, n) = 1$, $\text{NWW}(m, n) = 30$, $m = \dots$ $n = \dots$.

386. Podać miarę β kąta wewnętrznego n -kąta wypukłego, jeżeli wiadomo, że każdy z pozostałych $n-1$ kątów ma miarę α .

- a) $n=3$, $\alpha=45^\circ$, $\beta=$;
- b) $n=4$, $\alpha=100^\circ$, $\beta=$;
- c) $n=5$, $\alpha=100^\circ$, $\beta=$;
- d) $n=6$, $\alpha=140^\circ$, $\beta=$

387. Podać zbiór rozwiązań nierówności

- a) $x^2 < x$;
- b) $x^3 < x$;
- c) $x^4 < 16x^2$;
- d) $x^3 < 64x^2$

388. W dowolnym n -kącie wypukłym liczba przekątnych jest k razy większa od liczby boków. Powyższe zdanie jest prawdziwe dla

- a) $k=2$ oraz $n=$;
- b) $k=3$ oraz $n=$;
- c) $k=5$ oraz $n=$;
- d) $k=10$ oraz $n=$

389. Dla podanej liczby k podać taką liczbę naturalną $n \geq k$, że

$$\binom{n}{k+1} = k \cdot \binom{n}{k}$$

- a) $k=2$, $n=$;
- b) $k=3$, $n=$;
- c) $k=4$, $n=$;
- d) $k=5$, $n=$

390. Jeżeli liczba m jest większa od liczby n o $p\%$, to największy wspólny dzielnik liczb m , n stanowi $q\%$ liczby n . Dla podanej liczby p podać liczbę q .

- a) $p=10$, $q=$;
- b) $p=20$, $q=$;
- c) $p=30$, $q=$;
- d) $p=40$, $q=$

391. Jeżeli liczba m jest większa od liczby n o $p\%$, to najmniejsza wspólna wielokrotność liczb m , n jest większa o $q\%$ od liczby n . Dla podanej liczby p podać liczbę q .

- a) $p = 10$, $q = \dots$;
- b) $p = 20$, $q = \dots$;
- c) $p = 30$, $q = \dots$;
- d) $p = 40$, $q = \dots$.

392. Suma wyrazów dowolnego postępu arytmetycznego 15-wyrazowego $a_1, a_2, \dots, a_{15}$ jest równa $5(a_m + a_n + a_k)$. Dla podanych m , n wskazać taką liczbę naturalną k , aby powyższe zdanie było prawdziwe.

- a) $m = 1$, $n = 10$, $k = \dots$;
- b) $m = 3$, $n = 9$, $k = \dots$;
- c) $m = 6$, $n = 8$, $k = \dots$;
- d) $m = 7$, $n = 10$, $k = \dots$.

393. Niech $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem $f_1(x) = |x - 3|$. Funkcje f_n dla $n \geq 2$ określamy rekurencyjnie wzorem

$$f_n(x) = f_1(f_{n-1}(x)) .$$

Podać wartość

- a) $f_{1000}(1001) = \dots$;
- b) $f_{1000}(2002) = \dots$;
- c) $f_{1000}(3003) = \dots$;
- d) $f_{1000}(4004) = \dots$.

394. Podać wszystkie takie pary liczb naturalnych $b < c$, że trójkąt o bokach $20, b, c$ jest prostokątny.

$b = \dots, c = \dots$ $b = \dots, c = \dots$
 $b = \dots, c = \dots$ $b = \dots, c = \dots$
 $b = \dots, c = \dots$

395. Podać zbiór rozwiązań nierówności

- a) $-1/4 < \log_{16} x < 1/8$;
- b) $-1/2 < \log_{16} x < 3/2$;
- c) $-3/2 < \log_{16} x < 1/2$;
- d) $-1 < \log_{16} x < 1/4$

396. Podać zbiór rozwiązań nierówności

- a) $-1 < \log_x 4 < 1$;
- b) $-1/2 < \log_x 4 < 1/2$;
- c) $-2 < \log_x 4 < 2$;
- d) $-4 < \log_x 4 < 4$

397. W dowolnym postępie arytmetycznym n -wyrazowym $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ o sumie wyrazów równej S zachodzi równość $a_k = w$. Dla podanych n oraz S wskazać takie k oraz w , aby powyższe zdanie było prawdziwe.

- a) $n = 3, S = 21, k = \dots, w = \dots$;
- b) $n = 7, S = 21, k = \dots, w = \dots$;
- c) $n = 9, S = 63, k = \dots, w = \dots$;
- d) $n = 21, S = 63, k = \dots, w = \dots$.

398. Dany jest 15-kąt foremny $A_1A_2A_3\dots A_{15}$. Dla podanych x, y, z, s wskazać takie t , że pięciokąt wypukły o wierzchołkach A_x, A_y, A_z, A_s, A_t (niekoniecznie leżących na obwodzie pięciokąta w tej kolejności) ma pole równe polu pięciokąta $A_1A_3A_6A_{10}A_{15}$.

- a) $x = 1, y = 4, z = 5, s = 7, t = \dots$;
- b) $x = 1, y = 4, z = 8, s = 11, t = \dots$;
- c) $x = 1, y = 6, z = 11, s = 12, t = \dots$;
- d) $x = 1, y = 6, z = 11, s = 13, t = \dots$.

399. Podać przykład liczby niecałkowitej x spełniającej podane równanie, gdzie $[y]$ oraz $\{y\}$ oznaczają odpowiednio część całkowitą i ułamkową liczby y . Wynik podać w postaci ułamka dziesiętnego skończonego lub okresowego.

- a) $[x] = 3\{x\}, x = \dots$;
- b) $[x] = 4\{x\}, x = \dots$;
- c) $[x] = 5\{x\}, x = \dots$;
- d) $[x] = 6\{x\}, x = \dots$.

400. Podać wszystkie takie pary liczb naturalnych $b < c$, że trójkąt o bokach $15, b, c$ jest prostokątny.

- | | |
|------------------------|------------------------|
| $b = \dots, c = \dots$ | $b = \dots, c = \dots$ |
| $b = \dots, c = \dots$ | $b = \dots, c = \dots$ |
| $b = \dots, c = \dots$ | |

401. Dla podanej liczby n podać przykład rosnącego postępu arytmetycznego n -wyrazowego o sumie wyrazów równej n^2 , w którym występuje wyraz równy 1.

- a) $n = 3, \dots$;
- b) $n = 4, \dots$;
- c) $n = 5, \dots$;
- d) $n = 7, \dots$.

402. Dla podanej miary kąta α podać najmniejszą dodatnią miarę kąta β różną od α i spełniającą równość $\sin \alpha = \sin \beta$.

- a) $\alpha = -10^\circ$, $\beta = \dots$;
- b) $\alpha = 10^\circ$, $\beta = \dots$;
- c) $\alpha = 100^\circ$, $\beta = \dots$;
- d) $\alpha = 200^\circ$, $\beta = \dots$.

403. Dla podanych liczb rzeczywistych x i y wskazać taką liczbę rzeczywistą dodatnią a , aby prawdziwa była równość $\log_a x = y$.

- a) $x = 16$, $y = 2$, $a = \dots$;
- b) $x = 16$, $y = -4$, $a = \dots$;
- c) $x = 2$, $y = 4$, $a = \dots$;
- d) $x = 2$, $y = -1/4$, $a = \dots$.

404. Dla podanej liczby naturalnej n podać największą liczbę naturalną k , dla której prawdziwe jest następujące zdanie:

Dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich a , b , jeżeli iloczyn ab jest podzielny przez n , to co najmniej jeden z czynników a , b jest podzielny przez k .

- a) $n = 2^5 \cdot 3^3$, $k = \dots$;
- b) $n = 3^5 \cdot 5^3$, $k = \dots$;
- c) $n = 5^3 \cdot 31^2$, $k = \dots$;
- d) $n = 7^3 \cdot 37^2$, $k = \dots$.

405. W okrąg o promieniu 1 wpisano n -kąć foremny. Ile przekątnych tego n -kąta ma długość będącą liczbą całkowitą?

- a) Dla $n = 6$ takich przekątnych jest
- b) Dla $n = 12$ takich przekątnych jest
- c) Dla $n = 20$ takich przekątnych jest
- d) Dla $n = 30$ takich przekątnych jest

406. W dowolnym postępie arytmetycznym n -wyrazowym $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ o sumie 120 i jednym z wyrazów równym 15, co najmniej jeden z wyrazów jest równy w .

Dla podanej liczby n podać wszystkie liczby $w \neq 15$, dla których powyższe zdanie jest prawdziwe. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczba w o żądanej własności nie istnieje.

- a) $n = 6$, $w = \dots$;
- b) $n = 8$, $w = \dots$;
- c) $n = 12$, $w = \dots$;
- d) $n = 15$, $w = \dots$.

407. Dla podanej liczby naturalnej k podać **największą** liczbę całkowitą dodatnią d , dla której prawdziwe jest następujące zdanie:

Dla dowolnych liczb całkowitych m, n , jeżeli iloczyn mn jest podzielny przez k , to co najmniej jedna z liczb m, n jest podzielna przez d .

- a) $k = 12^4$, $d = \dots$;
- b) $k = 12^5$, $d = \dots$;
- c) $k = 56^2$, $d = \dots$;
- d) $k = 56^3$, $d = \dots$.

408. Dla podanych a, b, c podać takie d , aby istniał czworokąt wypukły o bokach długości (z zachowaniem kolejności) a, b, c, d , w który można wpisać okrąg. Napisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczba d o żądanej własności nie istnieje.

- a) $a = 1$, $b = 5$, $c = 7$, $d = \dots$;
- b) $a = 1$, $b = 4$, $c = 8$, $d = \dots$;
- c) $a = 4$, $b = 9$, $c = 8$, $d = \dots$;
- d) $a = 5$, $b = 11$, $c = 10$, $d = \dots$.

409. Dla podanych a, b, c podać takie d , aby istniał czworokąt wypukły o bokach długości (z zachowaniem kolejności) a, b, c, d , w którym przekątne są prostopadłe. Napisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczba d o żądanej własności nie istnieje.

- a) $a = 1$, $b = 5$, $c = 7$, $d = \dots$;
- b) $a = 1$, $b = 4$, $c = 8$, $d = \dots$;
- c) $a = 4$, $b = 9$, $c = 8$, $d = \dots$;
- d) $a = 5$, $b = 11$, $c = 10$, $d = \dots$.

410. Dla podanej miary kąta α podać najmniejszą dodatnią miarę kąta β różną od α i spełniającą równość $\cos \alpha = \cos \beta$.

- a) $\alpha = 100^\circ$, $\beta = \dots$;
- b) $\alpha = 180^\circ$, $\beta = \dots$;
- c) $\alpha = 300^\circ$, $\beta = \dots$;
- d) $\alpha = 400^\circ$, $\beta = \dots$.

411. W dowolnym postępie arytmetycznym n -wyrazowym $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ o sumie 90, co najmniej jeden z wyrazów jest równy w .

Dla podanej liczby n podać liczbę w , dla której powyższe zdanie jest prawdziwe. Wpisz **NIE**, jeśli liczba w o żądanej własności nie istnieje.

- a) $n = 5$, $w = \dots$;
- b) $n = 9$, $w = \dots$;
- c) $n = 10$, $w = \dots$;
- d) $n = 15$, $w = \dots$.

412. Dla podanych liczb a, b podać taką liczbę rzeczywistą c , aby zachodziła równość $\log_a b = \log_b c$.

- a) $a = 3, \quad b = 9, \quad c = \dots$;
- b) $a = 9, \quad b = 3, \quad c = \dots$;
- c) $a = 5^4, \quad b = 5^6, \quad c = \dots$;
- d) $a = 7^{5^4}, \quad b = 7^{5^6}, \quad c = \dots$.

413. Dla podanej liczby naturalnej a podać takie liczby całkowite dodatnie b, c , że trójkąt o bokach długości a, b, c jest prostokątny, a przy tym c jest długością jego przeciwprostokątnej. Napisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby b, c o żądanej własności nie istnieją.

- a) $a = 3, \quad b = \dots, \quad c = \dots$;
- b) $a = 5, \quad b = \dots, \quad c = \dots$;
- c) $a = 7, \quad b = \dots, \quad c = \dots$;
- d) $a = 9, \quad b = \dots, \quad c = \dots$.

414. Podać zbiór rozwiązań nierówności zapisując go w postaci przedziału lub sumy przedziałów.

- a) $-\frac{1}{2} < \log_4 x < \frac{3}{2} \quad \dots$;
- b) $\frac{1}{3} < \log_{64} x < \frac{1}{2} \quad \dots$;
- c) $-\frac{3}{5} < \log_{32} x < \frac{4}{5} \quad \dots$;
- d) $-\frac{3}{2} < \log_9 x < \frac{1}{4} \quad \dots$.

415. Podać zbiór rozwiązań nierówności zapisując go w postaci przedziału lub sumy przedziałów.

- a) $\frac{1}{2} < \log_x 8 < 3 \quad \dots$;
- b) $-\frac{1}{2} < \log_x 9 < 2 \quad \dots$;
- c) $-2 < \log_x 4 < \frac{1}{3} \quad \dots$;
- d) $-3 < \log_x 64 < -2 \quad \dots$.

416. Dany jest n -kąt foremny wpisany w okrąg o promieniu 1. Podać liczbę jego przekątnych krótszych od 1.

- a) $n = 12, \quad$ liczba przekątnych krótszych od 1: $\dots$;
- b) $n = 17, \quad$ liczba przekątnych krótszych od 1: $\dots$;
- c) $n = 25, \quad$ liczba przekątnych krótszych od 1: $\dots$;
- d) $n = 42, \quad$ liczba przekątnych krótszych od 1: $\dots$.

W kolejnych dwóch zadaniach udzielić jednej z odpowiedzi:

Zawsze jest podzielna, tzn. każda liczba n spełniająca podany warunek jest podzielna przez d .

Nigdy nie jest podzielna, tzn. żadna liczba n spełniająca podany warunek nie jest podzielna przez d .

Czasami jest podzielna, tzn. niektóre liczby n spełniające podany warunek są podzielne przez d , a niektóre nie.

417. Liczba naturalna n ma sumę cyfr równą 300. Co stąd wynika o podzielności liczby n przez d , jeżeli

- a) $d = 3$,
- b) $d = 18$,
- c) $d = 5$,
- d) $d = 8$,

418. Liczba naturalna n ma 3-cyfrową końcówkę 300. Co stąd wynika o podzielności liczby n przez d , jeżeli

- a) $d = 3$,
- b) $d = 18$,
- c) $d = 5$,
- d) $d = 8$,

419. Istnieje czworokąt wypukły o bokach długości a, b, c, d (z zachowaniem kolejności), w który można wpisać okrąg. Dla podanych a, b, c podać takie d , aby powyższe zdanie było prawdziwe. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że takie d nie istnieje.

- a) $a = 3$, $b = 4$, $c = 7$, $d = \dots$;
- b) $a = 5$, $b = 6$, $c = 7$, $d = \dots$;
- c) $a = 7$, $b = 13$, $c = 7$, $d = \dots$;
- d) $a = 4$, $b = 10$, $c = 5$, $d = \dots$.

420. Istnieje czworokąt wypukły o kątach miary $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (z zachowaniem kolejności), na którym można opisać okrąg. Dla podanych α, β podać takie γ, δ , aby powyższe zdanie było prawdziwe. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że takie γ, δ nie istnieją.

- a) $\alpha = 10^\circ$, $\beta = 177^\circ$, $\gamma = \dots$, $\delta = \dots$;
- b) $\alpha = 20^\circ$, $\beta = 50^\circ$, $\gamma = \dots$, $\delta = \dots$;
- c) $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 140^\circ$, $\gamma = \dots$, $\delta = \dots$;
- d) $\alpha = 80^\circ$, $\beta = 90^\circ$, $\gamma = \dots$, $\delta = \dots$.

421. Dla podanych liczb a oraz k wskazać taką liczbę naturalną n , aby zachodziła równość

$$\left(a^{a^k}\right)^{a^{a^k}} = a^{a^n}.$$

- a) $a=5, \quad k=2, \quad n=.....$;
 b) $a=3, \quad k=3, \quad n=.....$;
 c) $a=2, \quad k=5, \quad n=.....$;
 d) $a=3, \quad k=4, \quad n=.....$

422. W okrąg o promieniu 1 wpisano n -ką foremny. Niech $P(n)$ będzie liczbą przekątnych tego n -kąta, których **kwadrat długości** jest liczbą całkowitą. Wówczas

- a) $P(6) = \dots\dots\dots$
- b) $P(15) = \dots\dots\dots$
- c) $P(18) = \dots\dots\dots$
- d) $P(25) = \dots\dots\dots$
- e) $P(40) = \dots\dots\dots$
- f) $P(50) = \dots\dots\dots$
- g) $P(60) = \dots\dots\dots$

423. Podać zbiór rozwiązań równania w postaci przedziału lub sumy przedziałów. Symbol $[y]$ oznacza część całkowitą liczby y .

- a) $\lfloor \log_2 x \rfloor = 0$, ;
b) $\lfloor \log_2 x \rfloor = 1$, ;
c) $\lfloor \log_2 x \rfloor = 2$, ;
d) $\lfloor \log_3 x \rfloor = 1$,

424. Podać zbiór rozwiązań równania w postaci przedziału lub sumy przedziałów.

- a) $\lfloor \log_2 \log_2 x \rfloor = 0$, ;
b) $\lfloor \log_3 \log_2 x \rfloor = 1$, ;
c) $\lfloor \log_2 \log_2 x \rfloor = 2$, ;
d) $\lfloor \log_2 \log_3 x \rfloor = 1$,

425. Podać wartość podanej liczby w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego, gdy podana liczba jest wymierna. Napisać $\mathbb{N}$, jeśli podana liczba jest niewymierna.

- a) $\log_2 \log_2 4^{4^4} = \dots\dots\dots$;
b) $\log_2 \log_2 4^{4^5} = \dots\dots\dots$;
c) $\log_2 \log_2 4^{4^6} = \dots\dots\dots$;
d) $\log_2 \log_2 4^{4^8} = \dots\dots\dots$

426. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC . Dla podanej miary kąta $\sphericalangle ABC$ podać miarę kąta wypukłego $\sphericalangle AOC$.

- a) $\sphericalangle ABC = 50^\circ$, $\sphericalangle AOC = \dots\dots\dots$;
- b) $\sphericalangle ABC = 80^\circ$, $\sphericalangle AOC = \dots\dots\dots$;
- c) $\sphericalangle ABC = 100^\circ$, $\sphericalangle AOC = \dots\dots\dots$;
- d) $\sphericalangle ABC = 150^\circ$, $\sphericalangle AOC = \dots\dots\dots$.

427. Uzupełnij dane dotyczące n -kąta foremnego, gdzie LP jest liczbą przekątnych, a MKW miarą kąta wewnętrznego. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że taki wielokąt nie istnieje.

- a) $n = 6$, LP = $\dots\dots\dots$, MKW = $\dots\dots\dots$;
- b) $n = \dots\dots\dots$, LP = $\dots\dots\dots$, MKW = 140° ;
- c) $n = \dots\dots\dots$, LP = $\dots\dots\dots$, MKW = 150° ;
- d) $n = \dots\dots\dots$, LP = 170, MKW = $\dots\dots\dots$.

428. Dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich m, n, k , jeżeli iloczyn mnk jest podzielny przez D , to co najmniej jeden z czynników m, n, k jest podzielny przez d . Dla podanej liczby D wskazać największą liczbę całkowitą dodatnią d , dla której powyższe zdanie jest prawdziwe.

- a) $D = 2^3 \cdot 3^2$, $d = \dots\dots\dots$;
- b) $D = 2^4 \cdot 3^3$, $d = \dots\dots\dots$;
- c) $D = 2^9 \cdot 3^4$, $d = \dots\dots\dots$;
- d) $D = 2^{11} \cdot 3^7$, $d = \dots\dots\dots$.

429. Niech $A(n) = 4^{4^n}$, $B(n) = 16^{16^n}$, $C(n) = \log_2 A(n)$, $D(n) = \log_2 B(n)$, $E(n) = \log_{C(n)} D(n)$. Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego:

- a) $E(4) = \dots\dots\dots$;
- b) $E(8) = \dots\dots\dots$;
- c) $E(16) = \dots\dots\dots$;
- d) $E(64) = \dots\dots\dots$.

430. Niech $A(n) = 4^{4^n}$, $B(n) = 256^{256^n}$, $C(n) = \log_2 A(n)$, $D(n) = \log_2 B(n)$, $E(n) = \log_{C(n)} D(n)$. Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego:

- a) $E(2) = \dots\dots\dots$;
- b) $E(3) = \dots\dots\dots$;
- c) $E(4) = \dots\dots\dots$;
- d) $E(5) = \dots\dots\dots$.

431. Dany jest piętnastokąt foremny $A_1A_2A_3\dots A_{15}$. Dla podanych liczb m, n podać **wszystkie** takie liczby k , że trójkąt $A_mA_nA_k$ ma co najmniej jeden kąt o mierze 60°

- a) $m = 1, \quad n = 2, \quad k \in \{\dots\};$
- b) $m = 1, \quad n = 3, \quad k \in \{\dots\};$
- c) $m = 1, \quad n = 7, \quad k \in \{\dots\};$
- d) $m = 1, \quad n = 9, \quad k \in \{\dots\}.$

432. Podać zbiór rozwiązań nierówności w postaci przedziału lub sumy przedziałów.

- a) $|\log_2 x| < 1, \quad \dots;$
- b) $|\log_3 x| < 2, \quad \dots;$
- c) $|\log_4 x| > 1, \quad \dots;$
- d) $|\log_5 x| > 2, \quad \dots.$

433. W dowolnym rosnącym postępie arytmetycznym 2013-wyrazowym o wyrazach dodatnich, w którym wyrazy pierwszy, trzeci i szósty tworzą rosnący postęp geometryczny, także wyrazy m -ty, n -ty i k -ty tworzą (w tej właśnie kolejności) rosnący postęp geometryczny. Uzupełnij podane liczby tak, aby powyższe zdanie było prawdziwe.

Wpisz **NIE**, jeżeli uważasz, że takie liczby nie istnieją.

- a) $m = 2, \quad n = \dots, \quad k = \dots;$
- b) $m = \dots, \quad n = 4, \quad k = \dots;$
- c) $m = \dots, \quad n = \dots, \quad k = 7;$
- d) $m = \dots, \quad n = 7, \quad k = \dots.$

434. To samo polecenie, co w zadaniu poprzednim.

- a) $m = 1, \quad n = 13, \quad k = \dots;$
- b) $m = 1, \quad n = 5, \quad k = \dots;$
- c) $m = 1, \quad n = \dots, \quad k = 13;$
- d) $m = 2, \quad n = 97, \quad k = \dots.$