

W dniu 21 lutego 2013 r. omawiamy test kwalifikacyjny.

Uwaga: Przyjmujemy, że 0 nie jest liczbą naturalną, tzn. liczby naturalne są to liczby całkowite dodatnie.

1. Dane są liczby naturalne m, n . Wówczas dla dowolnej liczby naturalnej k , liczba k jest podzielna jednocześnie przez m oraz n wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzielna przez

Ponadto, jeżeli, to dla dowolnej liczby naturalnej k , liczba k jest podzielna jednocześnie przez m oraz n wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzielna przez mn .

2. W liczbie $3?20000001?5$ wpisać w miejsce obu znaków zapytania taką samą cyfrę tak, aby otrzymać liczbę podzielną przez 75. Podać wszystkie rozwiązania.

3. W liczbie $3120000001??$ wpisać w miejsce znaków zapytania takie cyfry (mogą być różne), aby otrzymać liczbę dającą przy dzieleniu przez 72 resztę 5. Podać wszystkie rozwiązania.

4. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne d , dla których prawdziwa jest następująca cecha podzielności przez d :

Dla dowolnej liczby naturalnej k , liczba k jest podzielna przez d wtedy i tylko wtedy, gdy liczba utworzona przez dwie ostatnie cyfry liczby k jest podzielna przez d .

5. Jakie reszty może dawać kwadrat liczby całkowitej przy dzieleniu przez 3? Przez 8? Przez 5?

6. Jakie reszty może dawać sześćcian liczby całkowitej przy dzieleniu przez 7? Przez 9?

7. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne $n > 1$, dla których liczba $n^2 - 1$ jest pierwsza.

8. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p , dla których liczba $3p + 1$ jest pierwsza.

9. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p , dla których liczba $p^2 + 2$ jest pierwsza.

10. Czy istnieją liczby naturalne m, n spełniające równanie

$$6^m = 12^n ?$$

11. Czy istnieją liczby naturalne m, n, k spełniające równanie

$$6^m \cdot 12^n = 18^k ?$$

12. Czy istnieją liczby naturalne m, n, k spełniające równanie

$$18^m \cdot 24^n = 12^k ?$$

13. Wskazać takie liczby naturalne m, n , że

$$m^3 n^4 = 2^{11} \cdot 3^7 \cdot 5^{13}.$$

14. Która liczba jest większa, $2^{23} \cdot 18^{10}$ czy $12^{15} \cdot 3^7$?

15. Ile zer końcowych ma liczba $33!$?

16. Ile zer końcowych ma liczba $1000!$?

17. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne d o następującej własności: Dla dowolnych liczb naturalnych m, n , jeżeli iloczyn mn jest podzielny przez 7, to co najmniej jedna z liczb m, n jest podzielna przez d .

18. To samo z liczbą 24 zamiast 7.

19. Obliczyć $\text{NWD}(24!, 24^{24})$.

20. Obliczyć $\text{NWW}(12^{12}, 18^{18})$.

21. Dowieść, że liczba naturalna o sumie cyfr równej 47 nie może być ani kwadratem, ani sześcianiem liczby całkowitej.

22. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $n^2 - n$ jest parzysta, liczba $n^3 - n$ jest podzielna przez 6, a liczba $n^5 - n$ jest podzielna przez 30.

Wskazówka: $n^5 - n = (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) + \text{coś}$.

23. Niech $a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^9$, $b = 2^6 \cdot 3^{11} \cdot 5^5$, $c = 2^{10} \cdot 3^3 \cdot 7^2$.

Obliczyć $\text{NWD}(a, b, c)$ oraz $\text{NWW}(a, b, c)$.

24. Niech $a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 6^9$, $b = 2^6 \cdot 3^{11} \cdot 4^5$, $c = 2^{10} \cdot 3^3 \cdot 10^2$.

Obliczyć $\text{NWD}(a, b, c)$ oraz $\text{NWW}(a, b, c)$.

25. Na wyspach Bergamutach podobno jest kot w butach i podobno używają tam tylko liczb naturalnych dających przy dzieleniu przez 3 resztę 1. To ograniczenie nie pozwala na wykonywanie dodawania, ale mnożenie nie sprawia kłopotu. Można też bez problemu mówić o podzielności liczb. Liczba 4 jest uważana za liczbę pierwszą, bo oprócz 1 i 4 nie ma żadnego innego dzielnika spośród liczb używanych na Bergamutach. Które spośród liczb mniejszych od 30 są na Bergamutach uważane za pierwsze, a które za złożone? Czy na Bergamutach prawdziwe jest twierdzenie o jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze?

Czy na Bergamutach prawdziwa jest następująca charakteryzacja wspólnych dzielników liczb m i n :

Liczba d jest wspólnym dzielnikiem liczb m i n wtedy i tylko wtedy, gdy d jest dzielnikiem liczby $\text{NWD}(m, n)$.

Czy na Bergamutach prawdziwa jest następująca charakteryzacja wspólnych wielokrotności liczb m i n :

Liczba w jest wspólną wielokrotnością liczb m i n wtedy i tylko wtedy, gdy w jest wielokrotnością liczby $\text{NWD}(m, n)$.

Czy na Bergamutach prawdziwe są wzory:

- a) $(\text{NWD}(m, n))^2 = \text{NWD}(m^2, n^2)$
 b) $\text{NWD}(a, b, c) = \text{NWD}(\text{NWD}(a, b), c)$

26. Połączyć podane warunki w grupy warunków równoważnych dla dowolnej liczby naturalnej n .

- a) liczba n jest nieparzysta
 b) liczba n jest względnie pierwsza z 6
 c) jedna z liczb $n-1$, $n+1$ jest podzielna przez 4
 d) jedna z liczb $n-1$, $n+1$ jest podzielna przez 6
 e) jedna z liczb $n-1$, $n+1$ jest podzielna przez 8
 f) liczba n^2-1 jest podzielna przez 4
 g) liczba n^2-1 jest podzielna przez 8
 h) liczba n^2-1 jest podzielna przez 12
 i) liczba n^2-1 jest podzielna przez 16
 j) liczba n^2-1 jest podzielna przez 24

27. Dowieść, że w ciągu 1, 2, 4, 8, 16, 23, 28, ..., w którym każdy kolejny wyraz powstaje z poprzedniego przez dodanie sumy cyfr, nie występuje liczba 2013.

28. Niech $n!! = n(n-2)(n-4)\dots$ będzie iloczynem liczb naturalnych nie większych od n i będących tej samej parzystości, co n . Ile zer końcowych mają liczby $34!!$ oraz $35!!$?

29. Dowieść, że iloczyn dowolnych czterech kolejnych liczb naturalnych powiększony o jeden jest kwadratem liczby całkowitej.

30. Uporządkować podane liczby w kolejności rosnącej. Nie używać kalkulatora!!!

$$\begin{aligned} a &= 3 \\ b &= \sqrt{7 + \sqrt{10}} \\ c &= \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} \\ d &= \sqrt{10} \\ e &= \sqrt{2} + \sqrt{3} \\ f &= \sqrt{5 + 3\sqrt{2}} \end{aligned}$$

31. Obliczyć

- a) $\text{NWD}(254678914^{37}, 10^{43})$
 b) $\text{NWD}(472851364^{43}, 2^{50})$
 c) $\text{NWD}(100000008^{25}, 12^{16})$

- d) $\text{NWD}(100000011^{44}, 300^{300})$
- e) $\text{NWD}(200000004^{31}, 24^{24})$
- f) $\text{NWD}(18465210275^{44}, 10^{47})$
- g) $\text{NWD}(7771428426328^{60}, 14^{37})$
- h) $\text{NWD}(1122334455666^{50}, 44^{37})$
- i) $\text{NWD}(12468945716272^{29}, 14^{17}, 330^{23})$
- j) $\text{NWD}(1352263965789126^{44}, 26^{19}, 39^{22})$

32. Wskazać najmniejszą (o ile taka w ogóle istnieje) liczbę naturalną k , dla której podane wyrażenie jest prawdziwe dla dowolnych liczb naturalnych m, n i (ewentualnie) r .

- a) $3^k | mn \Rightarrow (3^3 | m \vee 3^3 | n)$
- b) $5^k | mn \Rightarrow (5^2 | m \vee 5^7 | n)$
- c) $7^k | mnr \Rightarrow (7^5 | m \vee 7^3 | n \vee 7^{12} | r)$
- d) $4^k | mnr \Rightarrow (4^5 | m \vee 4^3 | n \vee 4^{12} | r)$
- e) $6^k | mnr \Rightarrow (6^5 | m \vee 6^3 | n \vee 6^{12} | r)$

33. Uporządkować podane liczby w kolejności rosnącej

$$\begin{aligned} a &= 90 \cdot 60^9 \\ b &= 15^3 \cdot 120^7 \\ c &= 2^7 \cdot 30^{11} \\ d &= 60^{10} \\ e &= 40^6 \cdot 45^5 \\ f &= 72^6 \cdot 5^{10} \\ g &= 5^{11} \cdot 50000^2 \end{aligned}$$

34. Pani napisała na tablicy pewną liczbę naturalną. Troje uczniów spostrzegło i wypowiedziało pewne własności napisanej liczby. Niestety, tylko dwóch uczniów podało własności poprawne, a trzeci uczeń się pomylił. Który uczeń popełnił błąd?

Wersja I

Pankracy: Napisana liczba jest kwadratem liczby całkowitej.
 Serwacy: Suma cyfr napisanej liczby jest równa 38.
 Bonifacy: Napisana liczba przy dzieleniu przez 9 daje resztę 2.

Wersja II

Pankracy: Napisana liczba jest kwadratem liczby całkowitej.
 Serwacy: Suma cyfr napisanej liczby jest równa 32.
 Bonifacy: Napisana liczba przy dzieleniu przez 9 daje resztę 7.

Wersja III

Pankracy: Napisana liczba jest kwadratem liczby całkowitej.
 Serwacy: Suma cyfr napisanej liczby jest równa 19.
 Bonifacy: Napisana liczba przy dzieleniu przez 9 daje resztę 3.

Wersja IV

Pankracy: Napisana liczba jest kwadratem liczby całkowitej.

Serwacy: Suma cyfr napisanej liczby jest równa 2004.

Bonifacy: Napisana liczba kończy się cyframi 2005.

Wersja V

Pankracy: Napisana liczba jest sześcianem liczby całkowitej.

Serwacy: Napisana liczba kończy się cyframi 444.

Bonifacy: Napisana liczba jest nieparzysta.

Wersja VI

Pankracy: Napisana liczba jest sześcianem liczby całkowitej.

Serwacy: Napisana liczba kończy się cyframi 2222.

Bonifacy: Suma cyfr napisanej liczby jest równa 43.

35. Uprościć wyrażenia

a)
$$\frac{1}{5-2\sqrt{6}} + 2\sqrt{6}$$

b)
$$\sqrt{(1-\sqrt{2})^6}$$

c)
$$(2^{2007} - 1) \cdot (2^{2007} + 1)$$

d)
$$(3^{669} - 1) \cdot (9^{669} + 3^{669} + 1)$$

e)
$$\frac{2^{2007} + 1}{2^{669} + 1}$$

36. Uzupełnić wzory skróconego mnożenia. Kropki występujące po lewej stronie równości zastąpić pojedynczym znakiem.

a) $(x+2)^2 = x^2 + \dots$

b) $a^3 + b^3 = (a+b) \cdot \dots$

c) $a^3 - b^3 = (a-b) \cdot \dots$

d) $a^3 \dots b^3 = (a^2 + ab + b^2) \cdot \dots$

e) $a^4 \dots b^4 = (a+b) \cdot \dots$

f) $a^4 \dots b^4 = (a-b) \cdot \dots$

g) $a^5 \dots b^5 = (a+b) \cdot \dots$

h) $a^5 \dots b^5 = (a-b) \cdot \dots$

i) $(a+b)^3 = a^3 + 3 \dots$

j) $(a-b)^4 = a^4 - \dots$

k) $(a-b)^5 = a^5 - \dots$

l) $a^n - b^n = (a-b) \cdot \dots$

Uwaga: Przyjmujemy, że w postępie geometrycznym wszystkie wyrazy są różne od zera.

37. Drugi, piąty i dziesiąty wyraz pewnego postępu arytmetycznego tworzą postęp geometryczny trójwyrazowy. Jaki jest iloraz tego postępu geometrycznego?

38. Obliczyć $1 + 2 + 4 + 7 + 8 + 10 + 13 + 14 + 16 + 19 + \dots + 1003$,
gdzie różnice między kolejnymi składnikami tworzą ciąg okresowy
 $1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots$

39. Obliczyć

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{27} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{2187},$$

gdzie w mianownikach znajdują się potęgi dwójki i trójki ustawione rosnąco.

40. Dla których liczb naturalnych $n \geq 3$ prawdziwe jest następujące twierdzenie?
W dowolnym postępie arytmetycznym n -wyrazowym o sumie 0 co najmniej jeden z wyrazów jest równy 0.

41. Rozwiązać nierówności

a) $\sqrt{x+2}\sqrt{x-2} < \sqrt{x^2-1}$

b) $\sqrt{x^2+27} > 2x$

c) $x^2 \geq \frac{1}{x}$

d) $x^3 \geq \frac{1}{x}$

e) $x(x^2+8x^8) \leq x(x^2+x^8)$

f) $\sqrt{4x-4-x^2} \leq x^{2007} + 2007$

g) $\sqrt{x^2+2007} \leq \sqrt{3x^2+1999}$

h) $||| ||| |x| - 1| - 1| - 1| - 1| - 1| \leq \frac{1}{2}$

i) $\sqrt{x^2-2x+1} + \sqrt{x^2-4x+4} < \sqrt{x^2+2x+1} + \sqrt{x^2-8x+16}$

j) $|x^2-25| < 24$

k) $(x+5)^{2007} + (x+5)^3 < (3x+1)^{2007} + (3x+1)^3$

l) $(x^2+1)^{x+2} \leq (x^2+1)^{x^2}$

42. Która z liczb jest większa

a) $123456 \cdot 123458$ czy 123457^2

b) $1000!$ czy 1000^{1000}

c) $1000!$ czy 100^{900}

d) $1000!$ czy $(500!)^2$

e) $\binom{2007}{666}^{2007}$ czy $\binom{2007}{666}^{666}$

- f) $(\sqrt[4]{83}-2)^{2007}$ czy $(\sqrt[4]{83}-2)^{666}$
g) $(\sqrt[4]{79}-2)^{2007}$ czy $(\sqrt[4]{79}-2)^{666}$
h) $(\sqrt[4]{79}-3)^{2007}$ czy $(\sqrt[4]{79}-3)^{666}$
i) $(\sqrt[4]{79}-3)^{2007}$ czy $(\sqrt[4]{79}-3)^{667}$
j) $2^{100!}$ czy $9^{99!}$
k) 2^{1000} czy 3^{700}
l) 5^{444} czy 3^{700}
m) $\frac{17}{20}$ czy $\frac{16}{21}$
n) $\frac{100}{7}$ czy $\frac{150}{11}$
o) $\frac{8^{444}}{17^{17}}$ czy $\frac{16^{333}}{19^{17}}$
p) $\frac{17^{667}}{3333^4 + 6666^4}$ czy $\frac{17^{666}}{3333^4}$
q) $\binom{2007}{666}$ czy $\binom{2007}{667}$
r) $\binom{2007}{666}$ czy $\binom{2008}{666}$
s) $\binom{2007}{1666}$ czy $\binom{2007}{1667}$
t) $\binom{2007}{1666}$ czy $\binom{2008}{1666}$
u) $\frac{1}{\sqrt{37}-6}$ czy $\sqrt{37}+6$
v) $\frac{1}{\sqrt{37}-6}$ czy 12
w) $\frac{1}{\sqrt{37}-6}$ czy $\frac{1}{\sqrt{97}-10}$
x) $\sqrt{37}-6$ czy $\frac{1}{10}$
y) $(\sqrt{37}-6)^{666}$ czy $\frac{1}{100^{100}}$
z) $\left(\frac{9}{4}\right)^{27/8}$ czy $\left(\frac{27}{8}\right)^{9/4}$

43. W miejsce kropek wstawić największą/najmniejszą (cokolwiek jest sensowne) liczbę, przy której podana implikacja jest prawdziwa dla dowolnej liczby naturalnej n

- a) $24|n^2 \Rightarrow \dots\dots|n^2$
b) $18|n^3 \Rightarrow \dots\dots|n^3$
c) $60|n^5 \Rightarrow \dots\dots|n^5$
d) $n^2|24 \Rightarrow n^2|\dots\dots$
e) $n^3|10! \Rightarrow n^3|\dots\dots$

f) $54|n^2 \Rightarrow \dots\dots\dots|n^3$

g) $n^5|12^8 \Rightarrow n|\dots\dots\dots$

h) $8^8|n^{10} \Rightarrow \dots\dots\dots|n$

44. Dla dowolnej liczby naturalnej n liczba n^2 jest podzielna przez 6 wtedy i tylko wtedy, gdy liczba n^2 jest podzielna przez d . Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

- a) $d = 4$;
- b) $d = 36$;
- c) $d = 12$;
- d) $d = 24$?

45. Czy w dowolnym 10-wyrazowym postępie arytmetycznym $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}$ zachodzi równość

- a) $a_1 + a_{10} = a_3 + a_7$;
- b) $a_3 + a_9 = 2a_6$;
- c) $a_2 + a_9 = a_5 + a_6$;
- d) $a_3 + a_8 = 2a_5$?

46. Spośród dowolnych k różnych liczb naturalnych można wybrać takie 3 różne liczby a, b, c , że obie liczby $a-b$ oraz $b-c$ są podzielne przez n . Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

- a) $k = 9, n = 5$;
- b) $k = 30, n = 15$;
- c) $k = 11, n = 7$;
- d) $k = 21, n = 10$?

47. Czy podaną liczbę można przedstawić w postaci $m^2 \cdot n^3$, gdzie m, n są liczbami naturalnymi

- a) $6 \cdot 8^7$;
- b) $6 \cdot 24^7$;
- c) $6 \cdot 9^7$;
- d) $6 \cdot 12^7$?

48. Czy podaną liczbę można przedstawić w postaci $m^2 \cdot n^3$, gdzie m, n są liczbami naturalnymi

- a) $(10!)^{10} \cdot 17$;
- b) $(13!)^{13} \cdot 11$;
- c) $(11!)^{11} \cdot 15$;
- d) $(12!)^{12} \cdot 13$?

49. Czy prawdziwa jest nierówność

- a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^k} + \dots + \frac{1}{2^{22}} < \frac{10}{11}$;
 b) $\frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \frac{1}{625} + \dots + \frac{1}{5^k} + \dots + \frac{1}{5^{55}} < \frac{3}{11}$;
 c) $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots + \frac{1}{3^k} + \dots + \frac{1}{3^{33}} < \frac{5}{11}$;
 d) $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \dots + \frac{1}{4^k} + \dots + \frac{1}{4^{44}} < \frac{4}{11}$?

50. Suma wyrazów dowolnego postępu arytmetycznego n -wyrazowego, o wyrazach będących liczbami naturalnymi, jest podzielna przez n . Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

- a) $n = 2008$;
 b) $n = 2011$;
 c) $n = 2009$;
 d) $n = 2010$?

51. Podać zbiór rozwiązań nierówności

- a) $x^{1000} \leq x^{2007}$
 b) $x^{1001} \leq x^{2008}$
 c) $x^{1001} \leq x^{2007}$
 d) $x^{1000} \leq x^{2008}$

52. Podać zbiór rozwiązań nierówności

- a) $|x - 4| < 3$
 b) $|x + 3| \geq 2$
 c) $|x - 3| \leq 4$
 d) $|x - 3| < |x - 4|$

53. Podać zbiór rozwiązań nierówności

- a) $4 \leq x^2 \leq 9$
 b) $1 \leq |x - 3| \leq 2$
 c) $-1 \leq x^2 \leq 4$
 d) $3 \leq |x| \leq 4$

54. Wskazać dowolny dzielnik pierwszy podanej liczby

- a) $13^{17} + 6^{17}$
 b) $13^{20} - 12^{20}$
 c) $13^{18} - 8^{18}$
 d) $13^{19} - 10^{19}$

Lista powtórkowa do kolokwium nr 1 (26 marca 2013)

Uwaga: To są zadania do samodzielnej powtórki - na zajęciach rozwiążemy tylko część zadań z tej listy.

Proszę umieć wskazać zadania, które wymagają omówienia.

Kolokwium będzie zakładało umiejętność rozwiązywania zadań 1-121 oraz umiejętność samodzielnego myślenia.

55. Obliczyć sumy postępów (ciągów) arytmetycznych i geometrycznych.

- a) $1 + 2 + 3 + \dots + n$
- b) $3 + 4 + 5 + \dots + n$
- c) $1 + 2 + 4 + \dots + 2^n$
- d) $1 + 3 + 9 + \dots + 3^{2007}$
- e) $2^n + 3 \cdot 2^{n-1} + 3^2 \cdot 2^{n-2} + \dots + 3^n$
- f) $\frac{1}{3} + 1\frac{1}{2} + 2\frac{2}{3} + \dots + 103$
- g) $4 + 6 + 9 + \dots + \frac{3^{100}}{298}$
- h) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{100}}$
- i) $7 + 9 + 11 + 13 + \dots + (6n + 1)$
- j) $5 + 15 + 25 + 35 + 45 + 55 + 65 + \dots + (100n + 55)$.
- k) $5 + 8 + 11 + 14 + \dots + 101$
- l) $-17 - 13 - 9 - \dots + 99$
- m) $27 + 81 + 243 + \dots + 3^{33}$
- n) $1 + \sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{2} + 4 + \dots + 2^n$

56. Czy równość

$$(a+b)^3 = a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3$$

jest prawdziwa dla

- a) $a = 0, b = 2007$;
- b) $a = 2007, b = 2008$;
- c) $a = -2007, b = 0$;
- d) $a = 2007, b = -2007$?

57. Czy istnieje taka liczba naturalna n , że

- a) $n^2 = 4^9 \cdot 3^{28} \cdot 6^{12}$;
- b) $n^5 = 4^9 \cdot 3^{28} \cdot 6^{12}$;
- c) $n^3 = 4^9 \cdot 3^{28} \cdot 6^{12}$;
- d) $n^4 = 4^9 \cdot 3^{28} \cdot 6^{12}$?

58. Czy równość $\sqrt{x^2} = x$ jest prawdziwa dla

- a) $x = 2^{448} - 4^{336}$;
- b) $x = 16^{112} - 2^{448}$;
- c) $x = 4^{336} - 8^{224}$;
- d) $x = 8^{224} - 16^{112}$?

59. Czy podana liczba jest podzielna przez 2^{111}

- a) 6256544265423562514^{70} ;
- b) 1547578087823541024^{40} ;
- c) 4777247245432274100^{60} ;
- d) 8759859808595634036^{50} ?

60. Czy dla dowolnych liczb naturalnych a, b

- a) liczba $\text{NWW}(a, b)$ jest podzielna przez $\text{NWD}(a, b)$;
- b) liczba $\text{NWW}(a, b)$ jest podzielna przez b ;
- c) liczba $\text{NWD}(a, b)$ jest podzielna przez $\text{NWW}(a, b)$;
- d) liczba $\text{NWD}(a, b)$ jest podzielna przez a ?

61. Niech $S(n)$ oznacza sumę cyfr liczby n . Czy dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $n - S(n)$ jest podzielna przez

- a) 3;
- b) 9;
- c) 4;
- d) 5?

62. Czy dla dowolnej liczby pierwszej $p > 10$ podana liczba jest podzielna przez 3

- a) $p + 2$;
- b) $p^2 + 7$;
- c) $p + 3$;
- d) $p^2 + 5$?

63. Czy dla dowolnego postępu geometrycznego trójwyrazowego a_1, a_2, a_3 podany niżej ciąg jest postępem geometrycznym

- a) $a_1 + 7, a_2 + 7, a_3 + 7$;
- b) $\sqrt[3]{a_1}, \sqrt[3]{a_2}, \sqrt[3]{a_3}$;
- c) $7a_1, 7a_2, 7a_3$;
- d) a_1^7, a_2^7, a_3^7 ?

64. Czy istnieją dwie liczby naturalne, których największy wspólny dzielnik stanowi $p\%$ ich najmniejszej wspólnej wielokrotności, jeżeli

- a) $p = 20$;
- b) $p = 50$;
- c) $p = 30$;
- d) $p = 40$?

65. Czy podana liczba jest kwadratem liczby naturalnej

- a) $6^5 \cdot 8^3$;
- b) $6^5 \cdot 24^3$;
- c) $6^5 \cdot 12^3$;
- d) $6^5 \cdot 18^3$?

66. Czy równość

$$a^4 \cdot b^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

jest prawdziwa dla

- a) $a = 2, b = 2$;
- b) $a = 2, b = 5/2$;
- c) $a = 3, b = 2$;
- d) $a = 3, b = 3/2$?

67. Czy istnieje taka liczba pierwsza p , że

- a) liczba $p+23$ jest pierwsza;
- b) liczba $p+29$ jest pierwsza;
- c) liczba $p+25$ jest pierwsza;
- d) liczba $p+27$ jest pierwsza?

68. Czy $\text{NWW}(a, b, c) = abc$, jeżeli

- a) $a = 3, b = 5, c = 7$;
- b) $a = 3, b = 20, c = 25$;
- c) $a = 3, b = 6, c = 8$;
- d) $a = 3, b = 9, c = 15$?

69. Czy prawdziwa jest równość

- a) $3 \cdot \binom{11}{4} = 2 \cdot \binom{11}{5}$;
- b) $3 \cdot \binom{19}{7} = 2 \cdot \binom{19}{8}$;
- c) $3 \cdot \binom{14}{5} = 2 \cdot \binom{14}{6}$;
- d) $3 \cdot \binom{17}{6} = 2 \cdot \binom{17}{7}$?

70. Dla dowolnej liczby naturalnej n , liczba n^2 jest podzielna przez a wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzielna przez b . Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

- a) $a = 6, b = 18$;
- b) $a = 48, b = 24$;
- c) $a = 12, b = 54$;
- d) $a = 24, b = 36$?

71. Czy prawdziwa jest równość

- a) $\sqrt{(6 - \sqrt{55})^{12}} = (6 - \sqrt{55})^6$;
- b) $\sqrt{(9 - \sqrt{55})^{18}} = (9 - \sqrt{55})^9$;
- c) $\sqrt{(7 - \sqrt{55})^{14}} = (7 - \sqrt{55})^7$;
- d) $\sqrt{(8 - \sqrt{55})^{16}} = (8 - \sqrt{55})^8$?

72. Czy prawdziwa jest nierówność

- a) $5 - \sqrt{24} < \frac{1}{10}$;
- b) $\sqrt{51} - 7 < \frac{1}{7}$;
- c) $\sqrt{26} - 5 < \frac{1}{10}$;
- d) $7 - \sqrt{47} < \frac{1}{7}$?

73. Czy prawdziwa jest nierówność

- a) $2\sqrt{2} < 3$;
- b) $4\sqrt[3]{2} < 5$;
- c) $3\sqrt{3} < 5$;
- d) $5\sqrt{5} < 11$?

74. 3-ci, 4-ty i 6-ty wyraz postępu arytmetycznego tworzą (w tej kolejności) postęp geometryczny trójwyrazowy. Czy stąd wynika, że postęp geometryczny tworzą także wyrazy (z zachowaniem kolejności):

- a) 3-ci, 5-ty, 11-ty ;
- b) 3-ci, 6-ty, 12-ty ;
- c) 4-ty, 6-ty, 10-ty ;
- d) 6-ty, 8-ty, 11-ty ?

75. Podać największy wspólny dzielnik i najmniejszą wspólną wielokrotność liczb a i b

- a) $a = 12^{18}$, $b = 18^{12}$
- b) $a = 11!$, $b = 12$,
- c) $a = 4^{20} \cdot 6^{15}$, $b = 4^{15} \cdot 6^{20}$
- d) $a = 10!$, $b = 11$

76. Podać największy wspólny dzielnik liczb

- a) $\text{NWD}(52714014^8, 2^{13}) = \dots\dots\dots$
- b) $\text{NWD}(11223344^8, 22446688^{13}) = \dots\dots\dots$
- c) $\text{NWD}(80000025^8, 30^{13}) = \dots\dots\dots$
- d) $\text{NWD}(4852000017^8, 10^{11}, 21^{14}) = \dots\dots\dots$

77. Podać NWD i NWW

- a) $\text{NWD}(60^{60}, 90^{90}) = \dots\dots\dots$
- b) $\text{NWW}(1133^{2266}, 2266^{1133}) = \dots\dots\dots$
- c) $\text{NWW}(60^{60}, 90^{90}) = \dots\dots\dots$
- d) $\text{NWD}(1133^{2266}, 2266^{1133}) = \dots\dots\dots$

78. Podać liczbę zer końcowych danej liczby

- a) $2008571939215^{50} \cdot 2008571939032^{22} \dots\dots\dots$
- b) $2008571939125^{20} \cdot 2008571939214^{55} \dots\dots\dots$
- c) $2008571939025^{40} \cdot 2008571939028^{33} \dots\dots\dots$
- d) $2008571939350^{30} \cdot 2008571939122^{44} \dots\dots\dots$

79. Podać taką liczbę p , że liczba p po zwiększeniu o $p\%$ daje n

- a) $n = 24$ $p = \dots\dots\dots$
- b) $n = 600$ $p = \dots\dots\dots$
- c) $n = 39$ $p = \dots\dots\dots$
- d) $n = 75$ $p = \dots\dots\dots$

85. Czy istnieją takie liczby naturalne a, b , że liczba $\text{NWD}(a, b)$ stanowi $p\%$ liczby $\text{NWW}(a, b)$, jeżeli

- a) $p = 15$;
- b) $p = 40$;
- c) $p = 20$;
- d) $p = 25$?

86. Czy prawdziwa jest nierówność

- a) $2^{29} < 3^{21}$;
- b) $2^{51} < 3^{29}$;
- c) $2^{40} < 3^{24}$;
- d) $2^{42} < 3^{28}$?

87. Czy istnieje taka liczba pierwsza p , że liczbą pierwszą jest również liczba

- a) $p^2 + 2$;
- b) $p^2 + 26$;
- c) $p^2 + 8$;
- d) $p^2 + 14$?

88. Dla dowolnych liczb naturalnych m, n , jeżeli liczba m^n (m do potęgi n) jest podzielna przez d , to co najmniej jedna z liczb m, n jest podzielna przez d . Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

- a) $d = 9$;
- b) $d = 12$;
- c) $d = 10$;
- d) $d = 11$?

89. Dla dowolnych liczb naturalnych k, m, n , jeżeli iloczyn kmn jest podzielny przez d^2 , to co najmniej jedna z liczb k, m, n jest podzielna przez d . Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

- a) $d = 8$;
- b) $d = 11$;
- c) $d = 9$;
- d) $d = 10$?

90. Podać największy wspólny dzielnik liczb

- a) $\text{NWD}(9!, 9^9) = \dots$
- b) $\text{NWD}(12!, 12^{12}) = \dots$
- c) $\text{NWD}(10!, 10^{10}) = \dots$
- d) $\text{NWD}(11!, 11^{11}) = \dots$

91. Podać zbiór rozwiązań nierówności

- a) $-4 < x^2 < 9$
- b) $8 < x^3 < 27$
- c) $4 < x^2 < 9$
- d) $-8 < x^3 < 27$

92. Podać przykład ciągu arytmetycznego n -wyrazowego o sumie wyrazów równej n , zawierającego wyraz równy 0

- a) $n = 3$
- b) $n = 6$
- c) $n = 4$
- d) $n = 5$

93. Wskazać dowolny dzielnik pierwszy podanej liczby

- a) $13^{13} - 6^{13}$
- b) $37^{37} + 12^{37}$
- c) $13^{13} + 6^{13}$
- d) $37^{37} - 12^{37}$

94. Dana jest liczba naturalna n . Niech D będzie zbiorem wszystkich dzielników naturalnych liczby n , a W zbiorem jej wszystkich wielokrotności. Napisz, czemu jest równa podana liczba (możesz też napisać *nie istnieje*, jeśli uważasz, że podana liczba nie istnieje).

- a) Największy wspólny dzielnik wszystkich liczb ze zbioru D
- b) Najmniejsza wspólna wielokrotność wszystkich liczb ze zbioru W
- c) Najmniejsza wspólna wielokrotność wszystkich liczb ze zbioru D
- d) Największy wspólny dzielnik wszystkich liczb ze zbioru W

95. Czy nierówność $x^2 < x^4$ jest prawdziwa dla

- a) $x = \sqrt{29} - 4$;
- b) $x = \sqrt{29} - 7$;
- c) $x = \sqrt{29} - 5$;
- d) $x = \sqrt{29} - 6$?

96. Czy nierówność $x^3 < x^5$ jest prawdziwa dla

- a) $x = \sqrt{29} - 4$;
- b) $x = \sqrt{29} - 7$;
- c) $x = \sqrt{29} - 5$;
- d) $x = \sqrt{29} - 6$?

97. Czy równość $\binom{n+1}{k} = 3 \cdot \binom{n}{k}$ jest prawdziwa dla

- a) $n = 10, \quad k = 8$;
- b) $n = 20, \quad k = 14$;
- c) $n = 14, \quad k = 10$;
- d) $n = 18, \quad k = 12$?

98. Czy o liczbie m^n , gdzie m, n są liczbami całkowitymi dodatnimi, możemy wnioskować, że jest ona kwadratem liczby naturalnej, jeżeli wiemy, że

- a) liczba m jest kwadratem liczby naturalnej;
- b) liczba n jest parzysta;
- c) liczba n jest kwadratem liczby naturalnej;
- d) liczba m jest parzysta?

99. Czy o liczbie m^n , gdzie m, n są liczbami całkowitymi dodatnimi, możemy wnioskować, że jest ona liczbą parzystą, jeżeli wiemy, że

- a) liczba m jest kwadratem liczby naturalnej;
- b) liczba n jest parzysta;
- c) liczba n jest kwadratem liczby naturalnej;
- d) liczba m jest parzysta?

100. Czy istnieją takie liczby całkowite dodatnie m, n , że

- a) $n = 2 \cdot \text{NWD}(m, n)$ oraz $m = 3 \cdot \text{NWD}(m, n)$;
- b) $n = 10 \cdot \text{NWD}(m, n)$ oraz $m = 21 \cdot \text{NWD}(m, n)$;
- c) $n = 4 \cdot \text{NWD}(m, n)$ oraz $m = 6 \cdot \text{NWD}(m, n)$;
- d) $n = 6 \cdot \text{NWD}(m, n)$ oraz $m = 15 \cdot \text{NWD}(m, n)$?

101. Czy istnieją takie liczby całkowite dodatnie m, n , że

- a) $NWW(m, n) = 2 \cdot n = 3 \cdot m$;
- b) $NWW(m, n) = 10 \cdot n = 21 \cdot m$;
- c) $NWW(m, n) = 4 \cdot n = 6 \cdot m$;
- d) $NWW(m, n) = 6 \cdot n = 15 \cdot m$?

102. Czy dla dowolnej liczby pierwszej $p \geq 2011$ podana liczba jest podzielna przez 3

- a) $p^2 + 2015$;
- b) $p^2 + 2018$;
- c) $p^2 + 2016$;
- d) $p^2 + 2017$?

103. Czy dla dowolnej liczby pierwszej $p \geq 2011$ podana liczba jest **niepodzielna** przez 5

- a) $p^2 + 2015$;
- b) $p^2 + 2018$;
- c) $p^2 + 2016$;
- d) $p^2 + 2017$?

104. Dla podanej liczby naturalnej n wskazać liczbę naturalną $d < 100$, która jest dzielnikiem liczby n , a ponadto jest liczbą złożoną. Liczba n jest dziesięciocyfrowa, w jej zapisie dziesiętnym występuje 7 zer.

- a) $n = 1000000017$, $d = \dots\dots\dots$
- b) $n = 1000000028$, $d = \dots\dots\dots$
- c) $n = 1000000038$, $d = \dots\dots\dots$
- d) $n = 1000000065$, $d = \dots\dots\dots$

105. Dla podanej liczby naturalnej n wskazać największą liczbę naturalną k , dla której liczba n jest podzielna przez 12^k .

- a) $n = 8^8 \cdot 9^9$, $k = \dots\dots\dots$
- b) $n = 16^{16} \cdot 18^{18}$, $k = \dots\dots\dots$
- c) $n = 16^{16} \cdot 9^9$, $k = \dots\dots\dots$
- d) $n = 8^8 \cdot 18^{18}$, $k = \dots\dots\dots$

106. Podać (w postaci przedziału lub sumy przedziałów) zbiór rozwiązań nierówności.

- a) $1 < |x| < 64$
- b) $1 < x^6 < 64$
- c) $1 < x^2 < 64$
- d) $1 < x^3 < 64$

107. W dowolnym n -wyrazowym postępie arytmetycznym o sumie wyrazów równej S , co najmniej jeden z wyrazów jest równy w . Dla podanych n oraz S wskazać takie w , aby powyższe zdanie było prawdziwe. Jeśli uważasz, że takiego w nie ma, napisz: *nie istnieje*.

- a) $n = 3$, $S = 15$, $w = \dots\dots\dots$
- b) $n = 11$, $S = 77$, $w = \dots\dots\dots$
- c) $n = 5$, $S = 30$, $w = \dots\dots\dots$
- d) $n = 8$, $S = 64$, $w = \dots\dots\dots$

108. Czy prawdziwa jest nierówność

- a) $|\sqrt{11} - 5| < 1$;
- b) $|\sqrt{44} - 5| < 1$;
- c) $|\sqrt{22} - 5| < 1$;
- d) $|\sqrt{33} - 5| < 1$?

109. Liczba całkowita a jest mniejsza od liczby całkowitej dodatniej n o $p\%$, a liczba całkowita b jest większa od liczby n o $p\%$. Czy stąd wynika, że liczba a jest dzielnikiem liczby b , jeżeli

- a) $p = 20$;
- b) $p = 70$;
- c) $p = 50$;
- d) $p = 60$?

110. Czy podana liczba jest czwartą potęgą liczby całkowitej

- a) 9^{10} ;
- b) 16^{17} ;
- c) 11^{12} ;
- d) 13^{14} ?

111. Czy podana liczba jest wymierna

- a) $\sqrt{(3 - \sqrt{19})^2} + \sqrt{19}$;
- b) $\sqrt{(\sqrt{59} - 9)^2} + \sqrt{59}$;
- c) $\sqrt{(5 - \sqrt{19})^2} + \sqrt{19}$;
- d) $\sqrt{(\sqrt{59} - 7)^2} + \sqrt{59}$?

112. Czy prawdziwa jest nierówność

- a) $\frac{7+\sqrt{17}}{11+\sqrt{29}} < \frac{7+\sqrt{19}}{11+\sqrt{29}};$
- b) $\frac{7-\sqrt{19}}{11-\sqrt{29}} < \frac{7-\sqrt{19}}{11-\sqrt{31}};$
- c) $\frac{7+\sqrt{19}}{11+\sqrt{29}} < \frac{7+\sqrt{19}}{11+\sqrt{31}};$
- d) $\frac{7-\sqrt{17}}{11-\sqrt{29}} < \frac{7-\sqrt{19}}{11-\sqrt{29}}?$

113. Iloczyn mn liczb naturalnych m, n jest podzielny przez $2^5 \cdot 3^3$. Czy stąd wynika, że co najmniej jedna z liczb m, n jest podzielna przez

- a) 4;
- b) 9;
- c) 6;
- d) 8?

114. Iloczyn kmn liczb naturalnych k, m, n jest podzielny przez $2^5 \cdot 3^3$. Czy stąd wynika, że co najmniej jeden z iloczynów km, mn, nk jest podzielny przez

- a) 6;
- b) 36;
- c) 16;
- d) 27?

115. Czy istnieje 17-wyrazowy postęp arytmetyczny, w którym liczba wyrazów całkowitych jest równa

- a) 6;
- b) 9;
- c) 7;
- d) 8?

116. Czy istnieje 17-wyrazowy postęp geometryczny, w którym liczba wyrazów wymiernych jest równa

- a) 6;
- b) 9;
- c) 7;
- d) 8?

117. Czy podana liczba jest podzielna przez 5

- a) $\binom{2012}{3}$;
- b) $\binom{2015}{3}$;
- c) $\binom{2013}{3}$;
- d) $\binom{2014}{3}$?

118. Podać największy wspólny dzielnik i najmniejszą wspólną wielokrotność liczb

- a) $\text{NWD}(6^{11}, 12^{10}) = \dots\dots\dots$, $\text{NWW}(6^{11}, 12^{10}) = \dots\dots\dots$
- b) $\text{NWD}(18^{11}, 12^{10}) = \dots\dots\dots$, $\text{NWW}(18^{11}, 12^{10}) = \dots\dots\dots$
- c) $\text{NWD}(6^{11}, 18^{10}) = \dots\dots\dots$, $\text{NWW}(6^{11}, 18^{10}) = \dots\dots\dots$
- d) $\text{NWD}(12^{11}, 18^{10}) = \dots\dots\dots$, $\text{NWW}(12^{11}, 18^{10}) = \dots\dots\dots$

119. Podać zbiór rozwiązań nierówności

- a) $|x^2 - 5| < 4$
- b) $|x^2 - 7| < 9$
- c) $|x^2 - 13| < 12$
- d) $|x^2 - 17| < 8$

120. W dowolnym n -wyrazowym postępie arytmetycznym o sumie wyrazów równej n , k -ty wyraz jest równy 1. Dla podanego n wskazać takie k , aby powyższe zdanie było prawdziwe. Jeśli uważasz, że takiego k nie ma, napisz: *nie istnieje*.

- a) $n = 5$, $k = \dots\dots\dots$
- b) $n = 15$, $k = \dots\dots\dots$
- c) $n = 8$, $k = \dots\dots\dots$
- d) $n = 11$, $k = \dots\dots\dots$

121. Wskazać dowolny dzielnik pierwszy podanej liczby

- a) $13^{11} + 6^{22}$
- b) $47^{19} - 6^{38}$
- c) $5^{13} + 6^{26}$
- d) $17^{17} + 6^{34}$