

EGZAMIN, ANALIZA 1A, 5.02.2015

12 zadań po 10 punktów, progi: 60=3.0, 78=3.5, 87=4.0, 96=4.5, 105=5.0

Zadanie 1.

Za każdą poprawną odpowiedź otrzymasz **1 punkt**.

Dla podanego wyrażenia podaj taką liczbę wymierną w , aby podane wyrażenie miało wartość wymierną.

1.1. $\frac{1}{6+\sqrt{34}} + w\sqrt{34}, \quad w = \mathbf{1/2}$

1.2. $\frac{1}{6+\sqrt{35}} + w\sqrt{35}, \quad w = \mathbf{1}$

1.3. $\frac{1}{6+\sqrt{37}} + w\sqrt{37}, \quad w = \mathbf{-1}$

1.4. $\frac{1}{6+\sqrt{38}} + w\sqrt{38}, \quad w = \mathbf{-1/2}$

1.5. $\sqrt{(6-\sqrt{35})^2} + w\sqrt{35}, \quad w = \mathbf{1}$

1.6. $\sqrt{(6-\sqrt{37})^2} + w\sqrt{37}, \quad w = \mathbf{-1}$

1.7. $\sqrt[4]{(6-\sqrt{37})^4} + w\sqrt{37}, \quad w = \mathbf{-1}$

1.8. $\log_2(6^6 \cdot 3^w), \quad w = \mathbf{-6}$

1.9. $\log_2(18^{18} \cdot 3^w), \quad w = \mathbf{-36}$

1.10. $\log_2(27^{27} \cdot 3^w), \quad w = \mathbf{-81}$

Zadanie 2. W każdym z poniższych zadań podaj (w postaci uproszczonej) kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** lub **NIE**).

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz 1 punkt.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz przynależność jednego z nich do zbioru, otrzymasz 0.5 punktu.

Za poprawne rozwiązanie wszystkich dziewięciu zadań otrzymasz **dziesiąty punkt**.

2.1. $A = \left\{ \frac{1}{n^2 - 20n + 101} : n \in \mathbb{N} \right\}$	Ocena
$\inf A = 0$	$\sup A = 1$
Czy kres dolny należy do zbioru A NIE	Czy kres górny należy do zbioru A TAK
2.2. $B = \left\{ \frac{1}{n^2 - 20n + 128} : n \in \mathbb{N} \right\}$	Ocena
$\inf B = 0$	$\sup B = 1/28$
Czy kres dolny należy do zbioru B NIE	Czy kres górny należy do zbioru B TAK
2.3. $C = \left\{ \frac{1}{n^2 - 20n + 93} : n \in \mathbb{N} \right\}$	Ocena
$\inf C = -1/3$	$\sup C = 1/2$
Czy kres dolny należy do zbioru C TAK	Czy kres górny należy do zbioru C TAK
2.4. $D = \{x^2 - 2x + 1 : x \in (0, 3)\}$	Ocena
$\inf D = 0$	$\sup D = 4$
Czy kres dolny należy do zbioru D TAK	Czy kres górny należy do zbioru D NIE
2.5. $E = \{x^2 - 4x + 4 : x \in (0, 3)\}$	Ocena
$\inf E = 0$	$\sup E = 4$
Czy kres dolny należy do zbioru E TAK	Czy kres górny należy do zbioru E NIE
2.6. $F = \{x^2 - 6x + 9 : x \in (0, 3)\}$	Ocena
$\inf F = 0$	$\sup F = 9$
Czy kres dolny należy do zbioru F NIE	Czy kres górny należy do zbioru F NIE
2.7. $G = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 4^n \leq 8^m \leq 27^n \right\}$	Ocena
$\inf G = 2/3$	$\sup G = \log_8 27 = \log_2 3$
Czy kres dolny należy do zbioru G TAK	Czy kres górny należy do zbioru G NIE
2.8. $H = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 4^n \leq 9^m \leq 27^n \right\}$	Ocena
$\inf H = \log_9 4 = \log_3 2$	$\sup H = 3/2$
Czy kres dolny należy do zbioru H NIE	Czy kres górny należy do zbioru H TAK
2.9. $I = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 4^n \leq 16^m \leq 27^n \right\}$	Ocena
$\inf I = 1/2$	$\sup I = \log_{16} 27$
Czy kres dolny należy do zbioru I TAK	Czy kres górny należy do zbioru I NIE

Zadanie **3.**

Za każdą poprawną odpowiedź otrzymasz **1 punkt**.

Zapisać w postaci przedziału obustronnie otwartego zbiór **wszystkich wartości rzeczywistych dodatnich** parametru p , dla których podany szereg jest zbieżny. Przedział może być nieograniczony, tzn. o prawym końcu $+\infty$.

$$\mathbf{3.1.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p + p} \text{ jest zbieżny} \quad \Leftrightarrow \quad p \in (\mathbf{1}, +\infty)$$

$$\mathbf{3.2.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p + p} \text{ jest zbieżny} \quad \Leftrightarrow \quad p \in (\mathbf{0}, +\infty)$$

$$\mathbf{3.3.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^p + p}} \text{ jest zbieżny} \quad \Leftrightarrow \quad p \in (\mathbf{2}, +\infty)$$

$$\mathbf{3.4.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{n^p + p} \text{ jest zbieżny} \quad \Leftrightarrow \quad p \in (\mathbf{11}, +\infty)$$

$$\mathbf{3.5.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p + p}{n^{10}} \text{ jest zbieżny} \quad \Leftrightarrow \quad p \in (\mathbf{0}, \mathbf{9})$$

$$\mathbf{3.6.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{\sqrt{n^p + p}} \text{ jest zbieżny} \quad \Leftrightarrow \quad p \in (\mathbf{22}, +\infty)$$

$$\mathbf{3.7.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^p + p}}{n^{10}} \text{ jest zbieżny} \quad \Leftrightarrow \quad p \in (\mathbf{0}, \mathbf{18})$$

$$\mathbf{3.8.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (p-3)^n \text{ jest zbieżny} \quad \Leftrightarrow \quad p \in (\mathbf{2}, \mathbf{4})$$

$$\mathbf{3.9.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (p-10)^n \text{ jest zbieżny} \quad \Leftrightarrow \quad p \in (\mathbf{9}, \mathbf{11})$$

$$\mathbf{3.10.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (2p-5)^n \text{ jest zbieżny} \quad \Leftrightarrow \quad p \in (\mathbf{2}, \mathbf{3})$$

Zadanie 4.

Niech $a_n = \frac{120}{n(n+1)(n+2)}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wiadomo, że wówczas szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, a jego suma jest równa 30.

W każdym z poniższych 10 pytań w miejscu kropek podaj sumę szeregu.

Za każdą poprawną odpowiedź otrzymasz **1 punkt**.

4.1. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1}) =$ **40**

4.2. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) =$ **20**

4.3. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 \cdot a_n) =$ **600**

4.4. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_2 \cdot a_n) =$ **150**

4.5. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - a_{n+1}^2) =$ **400**

4.6. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - a_{n+2}^2) =$ **425**

4.7. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - a_{n+3}^2) =$ **429**

4.8. $\sum_{n=2}^{\infty} (2^{a_n} - 2^{a_{n+1}}) =$ **31**

4.9. $\sum_{n=3}^{\infty} (2^{a_n} - 2^{a_{n+1}}) =$ **3**

4.10. $\sum_{n=4}^{\infty} (2^{a_n} - 2^{a_{n+1}}) =$ **1**

Zadanie 5.

W każdym z pięciu poniższych zadań podaj takie liczby rzeczywiste $a < b$, aby funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona podanym wzorem była ciągła.

Za każde poprawnie rozwiązane zadanie otrzymasz **2 punkty**.

$$5.1. \quad f(x) = \begin{cases} \log_2(x^2 + 7) & \text{dla } x < a \\ 3 & \text{dla } a \leq x < b \\ \log_2(x^2 + 7) & \text{dla } b \leq x \end{cases} \quad a = -1, \quad b = 1.$$

$$5.2. \quad f(x) = \begin{cases} \log_2(x^2 + 7) & \text{dla } x < a \\ 4 & \text{dla } a \leq x < b \\ \log_2(x^2 + 7) & \text{dla } b \leq x \end{cases} \quad a = -3, \quad b = 3.$$

$$5.3. \quad f(x) = \begin{cases} \log_2(x^2 + 7) & \text{dla } x < a \\ 5 & \text{dla } a \leq x < b \\ \log_2(x^2 + 7) & \text{dla } b \leq x \end{cases} \quad a = -5, \quad b = 5.$$

$$5.4. \quad f(x) = \begin{cases} \log_2(x^2 + 7) & \text{dla } x < a \\ 6 & \text{dla } a \leq x < b \\ \log_2(x^2 + 7) & \text{dla } b \leq x \end{cases} \quad a = -\sqrt{57}, \quad b = \sqrt{57}.$$

$$5.5. \quad f(x) = \begin{cases} \log_2(x^2 + 7) & \text{dla } x < a \\ 7 & \text{dla } a \leq x < b \\ \log_2(x^2 + 7) & \text{dla } b \leq x \end{cases} \quad a = -11, \quad b = 11.$$

Zadanie **6.**

Za każdą poprawną odpowiedź otrzymasz **1 punkt**.

Dla podanej liczby zespolonej z podaj najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią n , dla której $z^n = 1$.

6.1. $z = -i, \quad n = 4$

6.2. $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i, \quad n = 8$

6.3. $z = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i, \quad n = 8$

6.4. $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, \quad n = 12$

6.5. $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, \quad n = 12$

6.6. $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i, \quad n = 6$

6.7. $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i, \quad n = 3$

6.8. $z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i \right) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i \right), \quad n = 24$

6.9. $z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right), \quad n = 24$

6.10. $z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right), \quad n = 24$

Zadanie 7.

Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$(n+3) \cdot \binom{2n}{n} > 7 \cdot 4^{n-1}.$$

Rozwiązanie:

Zamierzamy przeprowadzić dowód indukcyjny.

1° (w tej chwili wydaje nam się, że jest to pierwszy krok indukcyjny) Dla $n = 1$ mamy

$$(n+3) \cdot \binom{2n}{n} = 4 \cdot 2 = 8$$

oraz

$$7 \cdot 4^{n-1} = 7 \cdot 4^0 = 7,$$

a zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $8 > 7$, jest więc prawdziwa.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$(n+3) \cdot \binom{2n}{n} > 7 \cdot 4^{n-1}.$$

Chcemy wykazać, że

$$(n+4) \cdot \binom{2n+2}{n+1} > 7 \cdot 4^n.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności otrzymujemy

$$\begin{aligned} (n+4) \cdot \binom{2n+2}{n+1} &= \frac{(n+4)(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} = \frac{(n+4)(2n)!(2n+1)(2n+2)}{n!(n+1)n!(n+1)} = \\ &= (n+3) \cdot \binom{2n}{n} \cdot \frac{(n+4)(2n+1)(2n+2)}{(n+3)(n+1)^2} = (n+3) \cdot \binom{2n}{n} \cdot \frac{2(n+4)(2n+1)}{(n+3)(n+1)} > \\ &> 7 \cdot 4^{n-1} \cdot \frac{2(n+4)(2n+1)}{(n+3)(n+1)} \geq 7 \cdot 4^{n-1} \cdot 4 = 7 \cdot 4^n, \end{aligned}$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{2(n+4)(2n+1)}{(n+3)(n+1)} \geq 4.$$

Powyższa nierówność jest równoważna kolejnym nierównościom

$$2(n+4)(2n+1) \geq 4(n+3)(n+1),$$

$$(n+4)(2n+1) \geq 2(n+3)(n+1),$$

$$2n^2 + n + 8n + 4 \geq 2(n^2 + n + 3n + 3),$$

$$2n^2 + 9n + 4 \geq 2n^2 + 8n + 6,$$

$$n \geq 2.$$

Drugi krok indukcyjny został więc przeprowadzony tylko dla $n \geq 2$.

Dla kompletności dowodu należy sprawdzić daną w treści zadania nierówność dla $n = 2$. Sprawdzenie dla $n = 2$ okazuje się przejmować rolę pierwszego kroku indukcyjnego.

1° (to okazuje się być pierwszym krokiem indukcyjnym) Dla $n = 2$ otrzymujemy

$$5 \cdot \binom{4}{2} = 5 \cdot 6 = 30 > 28 = 7 \cdot 4^1.$$

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$, a ponadto na początku rozwiązania wykonaliśmy bezpośrednie sprawdzenie dla $n = 1$.

Uwagi:

Sprawdzenie dla $n = 2$ nie wydaje się wymagać wiele pracy, jednak brak świadomości konieczności wykonania tego sprawdzenia jest bardzo poważnym błędem.

Jeśli zamiast nierówności

$$\frac{2(n+4)(2n+1)}{(n+3)(n+1)} \geq 4$$

w rozwiązaniu pojawi się ostra nierówność

$$\frac{2(n+4)(2n+1)}{(n+3)(n+1)} > 4, \quad (\spadesuit)$$

to w konsekwencji drugi krok indukcyjny zostanie przeprowadzony dla $n > 2$. Tym samym konieczne będzie także sprawdzenie dowodzonej nierówności dla $n = 3$.

Punktacja:

Maksymalna możliwa ocena za rozwiązanie, w którym brak jest świadomości konieczności wykonania sprawdzenia dla $n = 2$, to 5 punktów. To samo, gdy brak jest świadomości konieczności wykonania sprawdzenia dla $n = 3$, jeżeli z rozwiązania nie wynika (np. z powodu użycia ostrej nierówności $\spadesuit$), że została udowodniona implikacja $T(2) \Rightarrow T(3)$, gdzie $T(n)$ jest dowodzoną nierównością. Również rozwiązanie, w którym, nawet z powodu drobnego błędu rachunkowego, nie wykryto, że indukcja nie działa od samego początku, nie może być ocenione na więcej niż **5 punktów**, gdyż wówczas rozwiązujący stracił możliwość wykazania, że wie, co zrobić w przypadku indukcji startującej od $n = 2$.

Zadanie 8.

Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leq \sqrt[3]{n^3 + 63n^2} - n \leq 7C.$$

Rozwiązanie:

Ponieważ wyrażenie dane w treści zadania jest różnicą wyrażeń zbliżonej wielkości, zastosujemy wzór na różnicę sześcianów w postaci

$$a - b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}.$$

Otrzymujemy

$$\sqrt[3]{n^3 + 63n^2} - n = \frac{63n^2}{\left(\sqrt[3]{n^3 + 63n^2}\right)^2 + n \cdot \sqrt[3]{n^3 + 63n^2} + n^2}. \quad (3 \text{ punkty})$$

Dalszą część rozwiązania można przeprowadzić dwoma sposobami.

Sposób I

Szacujemy ostatnie wyrażenie od dołu, szacując mianownik od góry:

$$\begin{aligned} \frac{63n^2}{\left(\sqrt[3]{n^3 + 63n^2}\right)^2 + n \cdot \sqrt[3]{n^3 + 63n^2} + n^2} &\geq \frac{63n^2}{\left(\sqrt[3]{n^3 + 63n^3}\right)^2 + n \cdot \sqrt[3]{n^3 + 63n^3} + n^2} = \\ &= \frac{63n^2}{16n^2 + 4n^2 + n^2} = \frac{63n^2}{21n^2} = 3 \end{aligned} \quad (4 \text{ punkty})$$

i od góry (szacując mianownik od dołu):

$$\frac{63n^2}{\left(\sqrt[3]{n^3 + 63n^2}\right)^2 + n \cdot \sqrt[3]{n^3 + 63n^2} + n^2} \leq \frac{63n^2}{\left(\sqrt[3]{n^3 + 0}\right)^2 + n \cdot \sqrt[3]{n^3 + 0} + n^2} = \frac{63n^2}{3n^2} = 21 = 7 \cdot 3. \quad (3 \text{ punkty})$$

Otrzymaliśmy więc wymagane oszacowania ze stałą $C = 3$.

Sposób II

Oznaczamy uzyskane wyrażenie przez a_n i przepisujemy je w postaci

$$a_n = \frac{63n^2}{\left(\sqrt[3]{n^3 + 63n^2}\right)^2 + n \cdot \sqrt[3]{n^3 + 63n^2} + n^2} = \frac{63}{\left(\sqrt[3]{1 + \frac{63}{n}}\right)^2 + \sqrt[3]{1 + \frac{63}{n}} + 1}.$$

Ponieważ licznik ostatniego wyrażenia jest stały, a mianownik maleje wraz ze wzrostem n , ciąg (a_n) jest rosnący. Stąd wynika, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$a_1 \leq a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Ponieważ $a_1 = 3$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 21$, otrzymujemy wymagane oszacowania ze stałą $C = 3$.

Zadanie 9.

Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot x^{2n}}{n^n \cdot \binom{2n}{n}}.$$

Rozwiązanie:

Dla $x \neq 0$ stosujemy kryterium d'Alemberta:

$$\begin{aligned} \left| \frac{(n+1)! \cdot x^{2n+2}}{(n+1)^{n+1} \cdot \binom{2n+2}{n+1}} \cdot \frac{n^n \cdot \binom{2n}{n}}{n! \cdot x^{2n}} \right| &= \frac{(n+1) \cdot x^2}{\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{(2n+2) \cdot (2n+1)}{(n+1) \cdot (n+1)}} = \frac{(n+1) \cdot x^2}{\frac{(n+1)^n}{n^n} \cdot \frac{(2n+2) \cdot (2n+1)}{(n+1)}} = \\ &= \frac{x^2 \cdot (n+1) \cdot (n+1)}{\frac{(n+1)^n}{n^n} \cdot (2n+2) \cdot (2n+1)} = \frac{x^2 \cdot (n+1)}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot 2 \cdot (2n+1)} \rightarrow \frac{x^2}{e \cdot 4} \quad (\clubsuit) \end{aligned}$$

przy $n \rightarrow \infty$.

Zatem dany w zadaniu szereg potęgowy jest zbieżny, jeżeli

$$\frac{x^2}{4 \cdot e} < 1,$$

czyli

$$|x| < 2\sqrt{e},$$

a rozbieżny, jeżeli

$$\frac{x^2}{4 \cdot e} > 1,$$

czyli

$$|x| > 2\sqrt{e}.$$

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg potęgowy ma promień zbieżności $2\sqrt{e}$.

Punktacja częściowych rozwiązań:

Dojście do $(\clubsuit)$ - **7 punktów**.

Jeżeli w obliczeniach nie pojawia się liczba e , można uzyskać maksymalnie **2 punkty**.

Zadanie 10.

Skonstruować przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach rzeczywistych, że szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^4$ są zbieżne, a ponadto zachodzą równości

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 5 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4.$$

Rozwiązanie:

Sposób I (dla miłośników bezmyślnych rachunków)

Spróbujemy znaleźć szereg geometryczny o żądanych własnościach.

W tym celu rozważmy szereg geometryczny o pierwszym wyrazie $c \neq 0$ i ilorazie $q \neq 0$, pamiętając, aby $|q| < 1$. Wówczas $a_n = cq^{n-1}$, a ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \sum_{n=1}^{\infty} cq^{n-1} = \frac{c}{1-q}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} c^2 (q^2)^{n-1} = \frac{c^2}{1-q^2} \end{aligned}$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^4 = \sum_{n=1}^{\infty} c^4 (q^4)^{n-1} = \frac{c^4}{1-q^4}, \quad (3 \text{ punkty})$$

co po uwzględnieniu warunków zadania prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} \frac{c}{1-q} = 5 \\ \frac{c^2}{1-q^2} = \frac{c^4}{1-q^4}, \end{cases} \quad (4\text{-ty punkt})$$

co kolejno prowadzi do:

$$\begin{aligned} \begin{cases} c &= 5-5q \\ \frac{c^2}{1-q^2} &= \frac{c^2 \cdot c^2}{(1-q^2) \cdot (1+q^2)}, \end{cases} \\ \begin{cases} c &= 5-5q \\ 1 &= \frac{c^2}{1+q^2}, \end{cases} \\ \begin{cases} c &= 5-5q \\ 1+q^2 &= c^2, \end{cases} \end{aligned}$$

Pierwsze równanie daje zależność c od q . Podstawiając tę zależność do drugiego równania otrzymujemy kolejno:

$$\begin{aligned} q^2 + 1 &= 25q^2 - 50q + 25, & (\text{razem 5 punktów}) \\ 24q^2 - 50q + 24 &= 0, \\ 12q^2 - 25q + 12 &= 0, \end{aligned}$$

$$q = \frac{25 \pm \sqrt{25^2 - 4 \cdot 12 \cdot 12}}{24} = \frac{25 \pm \sqrt{25^2 - 24^2}}{24} = \frac{25 \pm \sqrt{(25-24) \cdot (25+24)}}{24} =$$

$$= \frac{25 \pm \sqrt{49}}{24} = \frac{25 \pm 7}{24} \quad (\text{razem 7 punktów}).$$

Uwzględniając nierówność $|q| < 1$ odrzucamy rozwiązanie $q = 32/24 = 4/3 > 1$ i rozpatrujemy $q = 18/24 = 3/4$. Ostatecznie

$$q = 3/4, \quad c = 5/4. \quad (\text{razem 9 punktów})$$

Otrzymane rozwiązanie prowadzi do

$$a_n = cq^{n-1} = \frac{5}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = \frac{5 \cdot 3^{n-1}}{4^n}. \quad (\text{razem 10 punktów})$$

Odpowiedź: Przykładem szeregu spełniającego warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot 3^{n-1}}{4^n}.$$

Sposób II (dla myślących i uważnie czytających założenia)

Przyjmijmy $a_n = 1$ dla $n \leq 5$ oraz $a_n = 0$ dla $n \geq 6$. Wówczas dla dowolnej liczby naturalnej k otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^k = 5,$$

skąd wynika, że podany szereg spełnia warunki zadania.

Zadanie 11.

Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n}{\sqrt{4n^4 + 4n}} + \frac{4n+3}{\sqrt{4n^4 + 4n+3}} + \frac{4n+6}{\sqrt{4n^4 + 4n+6}} + \frac{4n+9}{\sqrt{4n^4 + 4n+9}} + \frac{4n+12}{\sqrt{4n^4 + 4n+12}} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{13n-9}{\sqrt{4n^4 + 13n-9}} + \frac{13n-6}{\sqrt{4n^4 + 13n-6}} + \frac{13n-3}{\sqrt{4n^4 + 13n-3}} + \frac{13n}{\sqrt{4n^4 + 13n}} \right).$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez b_n . Zamierzamy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach, co wymaga oszacowania b_n od góry i od dołu przez ciągi zbieżne do wspólnej granicy.

Zauważmy, że składniki tej sumy bardzo się różnią – iloraz ostatniego składnika do pierwszego dąży do $13/4$ przy n dążącym do nieskończoności. Należy zatem oczekiwać, że oszacowanie sumy poprzez wspólne oszacowanie składników (i przemnożenie tego oszacowania przez liczbę składników), będzie prowadzić do oszacowań mających różne granice, co uniemożliwi skorzystanie z twierdzenia o trzech ciągach.

Zauważmy też, że za tak znaczną różnicę wielkości składników odpowiadają liczniki, podczas gdy mianowniki mają zbliżoną wielkość. Liczniki tworzą jednak postęp arytmetyczny, którego sumę bez problemu możemy obliczyć. W konsekwencji będziemy szacować mianowniki przez wspólną wielkość, nie zmieniając liczników, a następnie dodamy składniki powstałe w wyniku tego oszacowania.

I tak, szacowanie od góry (czyli szacowanie mianowników od dołu) prowadzi do

$$b_n \leq \frac{4n}{\sqrt{4n^4 + 4n}} + \frac{4n+3}{\sqrt{4n^4 + 4n}} + \frac{4n+6}{\sqrt{4n^4 + 4n}} + \frac{4n+9}{\sqrt{4n^4 + 4n}} + \dots + \frac{13n}{\sqrt{4n^4 + 4n}} = \\ = \frac{4n + (4n+3) + (4n+6) + (4n+9) + \dots + 13n}{\sqrt{4n^4 + 4n}} = c_n \quad (3 \text{ punkty})$$

Z kolei szacowanie od dołu (czyli szacowanie mianowników od góry) prowadzi do

$$b_n \geq \frac{4n}{\sqrt{4n^4 + 13n}} + \frac{4n+3}{\sqrt{4n^4 + 13n}} + \frac{4n+6}{\sqrt{4n^4 + 13n}} + \frac{4n+9}{\sqrt{4n^4 + 13n}} + \dots + \frac{13n}{\sqrt{4n^4 + 13n}} = \\ = \frac{4n + (4n+3) + (4n+6) + (4n+9) + \dots + 13n}{\sqrt{4n^4 + 13n}} = a_n. \quad (3 \text{ punkty})$$

Ze wzoru na sumę postępu arytmetycznego otrzymujemy

$$4n + (4n+3) + (4n+6) + (4n+9) + \dots + 13n = (3n+1) \cdot \frac{4n+13n}{2} = \frac{17n \cdot (3n+1)}{2},$$

(kolejne 2 punkty, a pozostałe 2 punkty za resztę rozwiązania)

gdzie

$$3n+1 = \frac{13n-4n}{3} + 1$$

jest liczbą wyrazów powyższego postępu (o różnicy 3).

Wobec tego

$$c_n = \frac{17n \cdot (3n+1)}{2 \cdot \sqrt{4n^4 + 4n}} = \frac{17 \cdot \left(3 + \frac{1}{n}\right)}{2 \cdot \sqrt{4 + \frac{4}{n^3}}} \rightarrow \frac{51}{4}$$

przy $n \rightarrow \infty$ i podobnie

$$a_n = \frac{17n \cdot (3n+1)}{2 \cdot \sqrt{4n^4 + 13n}} = \frac{17 \cdot \left(3 + \frac{1}{n}\right)}{2 \cdot \sqrt{4 + \frac{13}{n^3}}} \rightarrow \frac{51}{4}.$$

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$a_n \leq b_n \leq c_n,$$

a ponadto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{51}{4}$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{51}{4},$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{51}{4}.$$

Odpowiedź: Wartość granicy podanej w treści zadania jest równa $51/4$.

Maksymalnie 3 punkty za rozwiązanie z oszacowaniami postaci: liczba składników razy wspólne oszacowanie składników.

Zadanie 12.

Dana jest funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniająca warunki

$$|f(x) - f(y)| \leq 10 \cdot |x - y| \quad \text{dla dowolnych } x, y \in \mathbb{R}$$

oraz

$$|f(x+5) - f(x)| \leq 5 \quad \text{dla dowolnego } x \in \mathbb{R}.$$

Udowodnić jedną z następujących dwóch nierówności:

$$|f(8) - f(0)| \leq 30, \quad (\text{wersja trudniejsza za 10 punktów})$$

$$|f(8) - f(0)| \leq 35. \quad (\text{wersja łatwiejsza za 6 punktów})$$

Rozwiązanie:

Wersja łatwiejsza

Na mocy założeń o funkcji f otrzymujemy nierówności

$$|f(5) - f(0)| \leq 5 \quad (2 \text{ punkty})$$

oraz

$$|f(8) - f(5)| \leq 10 \cdot |8 - 5| = 30. \quad (2 \text{ punkty})$$

Korzystając z nierówności trójkąta oraz z powyższych dwóch nierówności otrzymujemy

$$|f(8) - f(0)| = |(f(8) - f(5)) + (f(5) - f(0))| \leq |f(8) - f(5)| + |f(5) - f(0)| \leq 30 + 5 = 35, \quad (2 \text{ punkty})$$

co kończy rozwiązanie zadania.

Wersja trudniejsza

Na mocy założeń o funkcji f otrzymujemy nierówności

$$|f(5) - f(0)| \leq 5, \quad (2 \text{ punkty})$$

$$|f(10) - f(5)| \leq 5 \quad (2 \text{ punkty})$$

oraz

$$|f(8) - f(10)| \leq 10 \cdot |8 - 10| = 20. \quad (3 \text{ punkty})$$

Korzystając z nierówności trójkąta oraz z powyższych trzech nierówności otrzymujemy

$$\begin{aligned} |f(8) - f(0)| &= |(f(8) - f(10)) + (f(10) - f(5)) + (f(5) - f(0))| \leq \\ &\leq |f(8) - f(10)| + |f(10) - f(5)| + |f(5) - f(0)| \leq 20 + 5 + 5 = 30, \quad (3 \text{ punkty}) \end{aligned}$$

co kończy rozwiązanie zadania.