

EGZAMIN, ANALIZA 1A, 5.02.2015

12 zadań po 10 punktów, progi: 60=3.0, 78=3.5, 87=4.0, 96=4.5, 105=5.0

Zadanie **1.**

Za każdą poprawną odpowiedź otrzymasz **1 punkt**.

Dla podanego wyrażenia podaj taką liczbę wymierną w , aby podane wyrażenie miało wartość wymierną.

1.1. $\frac{1}{6+\sqrt{34}} + w\sqrt{34}, \quad w = \dots\dots\dots$

1.2. $\frac{1}{6+\sqrt{35}} + w\sqrt{35}, \quad w = \dots\dots\dots$

1.3. $\frac{1}{6+\sqrt{37}} + w\sqrt{37}, \quad w = \dots\dots\dots$

1.4. $\frac{1}{6+\sqrt{38}} + w\sqrt{38}, \quad w = \dots\dots\dots$

1.5. $\sqrt{(6-\sqrt{35})^2} + w\sqrt{35}, \quad w = \dots\dots\dots$

1.6. $\sqrt{(6-\sqrt{37})^2} + w\sqrt{37}, \quad w = \dots\dots\dots$

1.7. $\sqrt[4]{(6-\sqrt{37})^4} + w\sqrt{37}, \quad w = \dots\dots\dots$

1.8. $\log_2(6^6 \cdot 3^w), \quad w = \dots\dots\dots$

1.9. $\log_2(18^{18} \cdot 3^w), \quad w = \dots\dots\dots$

1.10. $\log_2(27^{27} \cdot 3^w), \quad w = \dots\dots\dots$

Zadanie 2. W każdym z poniższych zadań podaj (w postaci uproszczonej) kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** lub **NIE**).

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz 1 punkt.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz przynależność jednego z nich do zbioru, otrzymasz 0.5 punktu.

Za poprawne rozwiązanie wszystkich dziewięciu zadań otrzymasz **dziesiąty punkt**.

2.1. $A = \left\{ \frac{1}{n^2 - 20n + 101} : n \in \mathbb{N} \right\}$	Ocena
$\inf A =$	$\sup A =$
Czy kres dolny należy do zbioru A	Czy kres górny należy do zbioru A
2.2. $B = \left\{ \frac{1}{n^2 - 20n + 128} : n \in \mathbb{N} \right\}$	Ocena
$\inf B =$	$\sup B =$
Czy kres dolny należy do zbioru B	Czy kres górny należy do zbioru B
2.3. $C = \left\{ \frac{1}{n^2 - 20n + 93} : n \in \mathbb{N} \right\}$	Ocena
$\inf C =$	$\sup C =$
Czy kres dolny należy do zbioru C	Czy kres górny należy do zbioru C
2.4. $D = \{x^2 - 2x + 1 : x \in (0, 3)\}$	Ocena
$\inf D =$	$\sup D =$
Czy kres dolny należy do zbioru D	Czy kres górny należy do zbioru D
2.5. $E = \{x^2 - 4x + 4 : x \in (0, 3)\}$	Ocena
$\inf E =$	$\sup E =$
Czy kres dolny należy do zbioru E	Czy kres górny należy do zbioru E
2.6. $F = \{x^2 - 6x + 9 : x \in (0, 3)\}$	Ocena
$\inf F =$	$\sup F =$
Czy kres dolny należy do zbioru F	Czy kres górny należy do zbioru F
2.7. $G = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 4^n \leq 8^m \leq 27^n \right\}$	Ocena
$\inf G =$	$\sup G =$
Czy kres dolny należy do zbioru G	Czy kres górny należy do zbioru G
2.8. $H = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 4^n \leq 9^m \leq 27^n \right\}$	Ocena
$\inf H =$	$\sup H =$
Czy kres dolny należy do zbioru H	Czy kres górny należy do zbioru H
2.9. $I = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 4^n \leq 16^m \leq 27^n \right\}$	Ocena
$\inf I =$	$\sup I =$
Czy kres dolny należy do zbioru I	Czy kres górny należy do zbioru I

Zadanie **3.**

Za każdą poprawną odpowiedź otrzymasz **1 punkt**.

Zapisać w postaci przedziału obustronnie otwartego zbiór **wszystkich wartości rzeczywistych dodatnich** parametru p , dla których podany szereg jest zbieżny. Przedział może być nieograniczony, tzn. o prawym końcu $+\infty$.

3.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p + p}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in \dots\dots\dots$

3.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p + p}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in \dots\dots\dots$

3.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^p + p}}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in \dots\dots\dots$

3.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{n^p + p}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in \dots\dots\dots$

3.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p + p}{n^{10}}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in \dots\dots\dots$

3.6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{\sqrt{n^p + p}}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in \dots\dots\dots$

3.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^p + p}}{n^{10}}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in \dots\dots\dots$

3.8. $\sum_{n=1}^{\infty} (p-3)^n$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in \dots\dots\dots$

3.9. $\sum_{n=1}^{\infty} (p-10)^n$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in \dots\dots\dots$

3.10. $\sum_{n=1}^{\infty} (2p-5)^n$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in \dots\dots\dots$

Zadanie 4.

Niech $a_n = \frac{120}{n(n+1)(n+2)}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wiadomo, że wówczas szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, a jego suma jest równa 30.

W każdym z poniższych 10 pytań w miejscu kropek podaj sumę szeregu.

Za każdą poprawną odpowiedź otrzymasz **1 punkt**.

4.1. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1}) = \dots\dots\dots$

4.2. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = \dots\dots\dots$

4.3. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 \cdot a_n) = \dots\dots\dots$

4.4. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_2 \cdot a_n) = \dots\dots\dots$

4.5. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - a_{n+1}^2) = \dots\dots\dots$

4.6. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - a_{n+2}^2) = \dots\dots\dots$

4.7. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - a_{n+3}^2) = \dots\dots\dots$

4.8. $\sum_{n=2}^{\infty} (2^{a_n} - 2^{a_{n+1}}) = \dots\dots\dots$

4.9. $\sum_{n=3}^{\infty} (2^{a_n} - 2^{a_{n+1}}) = \dots\dots\dots$

4.10. $\sum_{n=4}^{\infty} (2^{a_n} - 2^{a_{n+1}}) = \dots\dots\dots$

Zadanie 5.

W każdym z pięciu poniższych zadań podaj takie liczby rzeczywiste $a < b$, aby funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona podanym wzorem była ciągła.

Za każde poprawnie rozwiązane zadanie otrzymasz **2 punkty**.

$$5.1. \quad f(x) = \begin{cases} \log_2(x^2 + 7) & \text{dla } x < a \\ 3 & \text{dla } a \leq x < b \\ \log_2(x^2 + 7) & \text{dla } b \leq x \end{cases} \quad a = \dots\dots\dots, \quad b = \dots\dots\dots$$

$$5.2. \quad f(x) = \begin{cases} \log_2(x^2 + 7) & \text{dla } x < a \\ 4 & \text{dla } a \leq x < b \\ \log_2(x^2 + 7) & \text{dla } b \leq x \end{cases} \quad a = \dots\dots\dots, \quad b = \dots\dots\dots$$

$$5.3. \quad f(x) = \begin{cases} \log_2(x^2 + 7) & \text{dla } x < a \\ 5 & \text{dla } a \leq x < b \\ \log_2(x^2 + 7) & \text{dla } b \leq x \end{cases} \quad a = \dots\dots\dots, \quad b = \dots\dots\dots$$

$$5.4. \quad f(x) = \begin{cases} \log_2(x^2 + 7) & \text{dla } x < a \\ 6 & \text{dla } a \leq x < b \\ \log_2(x^2 + 7) & \text{dla } b \leq x \end{cases} \quad a = \dots\dots\dots, \quad b = \dots\dots\dots$$

$$5.5. \quad f(x) = \begin{cases} \log_2(x^2 + 7) & \text{dla } x < a \\ 7 & \text{dla } a \leq x < b \\ \log_2(x^2 + 7) & \text{dla } b \leq x \end{cases} \quad a = \dots\dots\dots, \quad b = \dots\dots\dots$$

Zadanie **6.**

Za każdą poprawną odpowiedź otrzymasz **1 punkt**.

Dla podanej liczby zespolonej z podaj najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią n , dla której $z^n = 1$.

6.1. $z = -i, \quad n = \dots\dots\dots$

6.2. $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i, \quad n = \dots\dots\dots$

6.3. $z = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i, \quad n = \dots\dots\dots$

6.4. $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, \quad n = \dots\dots\dots$

6.5. $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, \quad n = \dots\dots\dots$

6.6. $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i, \quad n = \dots\dots\dots$

6.7. $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i, \quad n = \dots\dots\dots$

6.8. $z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i \right) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i \right), \quad n = \dots\dots\dots$

6.9. $z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right), \quad n = \dots\dots\dots$

6.10. $z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right), \quad n = \dots\dots\dots$

Zadanie 7.

Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$(n+3) \cdot \binom{2n}{n} > 7 \cdot 4^{n-1}.$$

Zadanie 8.

Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leq \sqrt[3]{n^3 + 63n^2} - n \leq 7C.$$

Zadanie 9.

Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot x^{2n}}{n^n \cdot \binom{2n}{n}}.$$

Zadanie 10.

Skonstruować przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach rzeczywistych, że szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^4$ są zbieżne, a ponadto zachodzą równości

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 5 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4.$$

Zadanie 11.

Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n}{\sqrt{4n^4 + 4n}} + \frac{4n+3}{\sqrt{4n^4 + 4n+3}} + \frac{4n+6}{\sqrt{4n^4 + 4n+6}} + \frac{4n+9}{\sqrt{4n^4 + 4n+9}} + \frac{4n+12}{\sqrt{4n^4 + 4n+12}} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{13n-9}{\sqrt{4n^4 + 13n-9}} + \frac{13n-6}{\sqrt{4n^4 + 13n-6}} + \frac{13n-3}{\sqrt{4n^4 + 13n-3}} + \frac{13n}{\sqrt{4n^4 + 13n}} \right).$$

Zadanie 12.

Dana jest funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniająca warunki

$$|f(x) - f(y)| \leq 10 \cdot |x - y| \quad \text{dla dowolnych } x, y \in \mathbb{R}$$

oraz

$$|f(x+5) - f(x)| \leq 5 \quad \text{dla dowolnego } x \in \mathbb{R}.$$

Udowodnić jedną z następujących dwóch nierówności:

$$|f(8) - f(0)| \leq 30, \quad (\text{wersja trudniejsza za 10 punktów})$$

$$|f(8) - f(0)| \leq 35. \quad (\text{wersja łatwiejsza za 6 punktów})$$