

# EGZAMIN, ANALIZA 1A, 16.02.2015

12 zadań po 10 punktów, progi: 60=3.0, 78=3.5, 87=4.0, 96=4.5, 105=5.0

## Zadanie 1.

W każdym z trzech poniższych zadań podaj takie trzy pary liczb rzeczywistych  $a < b$ , aby funkcja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  określona podanym wzorem była ciągła.

Za każdą poprawnie podaną parę otrzymasz **1 punkt**.

Za poprawne podanie wszystkich dziewięciu par otrzymasz **dziesiąty punkt**.

$$1.1. \quad f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{dla } x < a \\ 64x & \text{dla } a \leq x < b \\ x^3 & \text{dla } b \leq x \end{cases} \quad \begin{matrix} a = -8, & b = 0 \\ a = -8, & b = 8 \\ a = 0, & b = 8 \end{matrix}$$


---

$$1.2. \quad f(x) = \begin{cases} x^6 & \text{dla } x < a \\ 64x^2 & \text{dla } a \leq x < b \\ x^6 & \text{dla } b \leq x \end{cases} \quad \begin{matrix} a = -2\sqrt{2}, & b = 0 \\ a = -2\sqrt{2}, & b = 2\sqrt{2} \\ a = 0, & b = 2\sqrt{2} \end{matrix}$$


---

$$1.3. \quad f(x) = \begin{cases} x^9 & \text{dla } x < a \\ 64x^3 & \text{dla } a \leq x < b \\ x^9 & \text{dla } b \leq x \end{cases} \quad \begin{matrix} a = -2, & b = 0 \\ a = -2, & b = 2 \\ a = 0, & b = 2 \end{matrix}$$

**Zadanie 2.** Przy każdej z poniższych pięciu liczb  $n$  podaj w miejscu kropek liczbę cyfr liczby  $n$  oraz pierwszą (od lewej) cyfrę liczby  $n$  w zapisie dziesiętnym.

Za każdą poprawnie podaną liczbę cyfr i za każdą poprawnie podaną pierwszą cyfrę otrzymasz **1 punkt**.

$$2.1. \quad n = \binom{10^{100}}{2}, \quad \text{liczba cyfr } \mathbf{200}, \quad \text{pierwsza cyfra } \mathbf{4}$$

$$2.2. \quad n = \binom{10^{100}}{3}, \quad \text{liczba cyfr } \mathbf{300}, \quad \text{pierwsza cyfra } \mathbf{1}$$

$$2.3. \quad n = \binom{2 \cdot 10^{100}}{2}, \quad \text{liczba cyfr } \mathbf{201}, \quad \text{pierwsza cyfra } \mathbf{1}$$

$$2.4. \quad n = \binom{2 \cdot 10^{100}}{3}, \quad \text{liczba cyfr } \mathbf{301}, \quad \text{pierwsza cyfra } \mathbf{1}$$

$$2.5. \quad n = \binom{2 \cdot 10^{100}}{4}, \quad \text{liczba cyfr } \mathbf{400}, \quad \text{pierwsza cyfra } \mathbf{6}$$

### Zadanie 3.

W każdym z poniższych zadań podaj (w postaci uproszczonej) kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** lub **NIE**).

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz 1 punkt.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz przynależność jednego z nich do zbioru, otrzymasz 0.5 punktu.

Za poprawne rozwiązanie wszystkich dziewięciu zadań otrzymasz **dziesiąty punkt**.

|                                                                                                                                       |                                                |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------|
| <b>3.1.</b> $A = \left\{ \frac{1}{n^2 - 20n + 121} : n \in \mathbb{N} \right\}$                                                       | Ocena .....                                    |
| $\inf A = 0$                                                                                                                          | $\sup A = 1/21$                                |
| Czy kres dolny należy do zbioru $A$ <b>NIE</b>                                                                                        | Czy kres górny należy do zbioru $A$ <b>TAK</b> |
| <b>3.2.</b> $B = \left\{ \frac{1}{n^2 - 20n + 87} : n \in \mathbb{N} \right\}$                                                        | Ocena .....                                    |
| $\inf B = -1/4$                                                                                                                       | $\sup B = 1/3$                                 |
| Czy kres dolny należy do zbioru $B$ <b>TAK</b>                                                                                        | Czy kres górny należy do zbioru $B$ <b>TAK</b> |
| <b>3.3.</b> $C = \left\{ \frac{1}{n^2 - 20n + 86} : n \in \mathbb{N} \right\}$                                                        | Ocena .....                                    |
| $\inf C = -1/5$                                                                                                                       | $\sup C = 1/2$                                 |
| Czy kres dolny należy do zbioru $C$ <b>TAK</b>                                                                                        | Czy kres górny należy do zbioru $C$ <b>TAK</b> |
| <b>3.4.</b> $D = \{x^2 - 2x + 1 : x \in (0, 11)\}$                                                                                    | Ocena .....                                    |
| $\inf D = 0$                                                                                                                          | $\sup D = 100$                                 |
| Czy kres dolny należy do zbioru $D$ <b>TAK</b>                                                                                        | Czy kres górny należy do zbioru $D$ <b>NIE</b> |
| <b>3.5.</b> $E = \{x^3 - 3x^2 + 3x - 1 : x \in (0, 11)\}$                                                                             | Ocena .....                                    |
| $\inf E = -1$                                                                                                                         | $\sup E = 1000$                                |
| Czy kres dolny należy do zbioru $E$ <b>NIE</b>                                                                                        | Czy kres górny należy do zbioru $E$ <b>NIE</b> |
| <b>3.6.</b> $F = \{x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 : x \in (0, 11)\}$                                                                      | Ocena .....                                    |
| $\inf F = 0$                                                                                                                          | $\sup F = 10000$                               |
| Czy kres dolny należy do zbioru $F$ <b>TAK</b>                                                                                        | Czy kres górny należy do zbioru $F$ <b>NIE</b> |
| <b>3.7.</b> $G = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 3^{18n} \leq \left(\frac{m}{n}\right)^m \leq 2^{160n} \right\}$     | Ocena .....                                    |
| $\inf G = 9$                                                                                                                          | $\sup G = 32$                                  |
| Czy kres dolny należy do zbioru $G$ <b>TAK</b>                                                                                        | Czy kres górny należy do zbioru $G$ <b>TAK</b> |
| <b>3.8.</b> $H = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 5^{50n} \leq \left(\frac{m}{n}\right)^m \leq 3^{81n} \right\}$      | Ocena .....                                    |
| $\inf H = 25$                                                                                                                         | $\sup H = 27$                                  |
| Czy kres dolny należy do zbioru $H$ <b>TAK</b>                                                                                        | Czy kres górny należy do zbioru $H$ <b>TAK</b> |
| <b>3.9.</b> $I = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 10^{200n} \leq \left(\frac{m}{n}\right)^m \leq 10^{3000n} \right\}$ | Ocena .....                                    |
| $\inf I = 100$                                                                                                                        | $\sup I = 1000$                                |
| Czy kres dolny należy do zbioru $I$ <b>TAK</b>                                                                                        | Czy kres górny należy do zbioru $I$ <b>TAK</b> |

### Zadanie 4.

Za każdą poprawnie podaną odpowiedź otrzymasz **1 punkt**.

Za każde całkowicie poprawnie rozwiązane zadanie (4.1 i 4.2) otrzymasz **piąty punkt** za to zadanie.

**4.1.** Podać w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru  $p$ , dla których podany szereg liczbowy jest zbieżny.

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} (p-5)^n$  jest zbieżny  $\Leftrightarrow p \in (4, 6)$

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} (p+8)^n$  jest zbieżny  $\Leftrightarrow p \in (-9, -7)$

c)  $\sum_{n=1}^{\infty} (2p-7)^n$  jest zbieżny  $\Leftrightarrow p \in (3, 4)$

d)  $\sum_{n=1}^{\infty} (p^2-3)^n$  jest zbieżny  $\Leftrightarrow p \in (-2, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, 2)$

**4.2.** Dla podanej liczby zespolonej  $z$  podać najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią  $n$  taką, że  $z^n$  jest liczbą rzeczywistą dodatnią.

a)  $z = 1+i$ ,  $n = 8$

b)  $z = 1+i\sqrt{3}$ ,  $n = 6$

c)  $z = \sqrt{3}+i$ ,  $n = 12$

d)  $z = (1+i) \cdot (\sqrt{3}+i)$ ,  $n = 24$

### Zadanie 5.

Niech  $a_n = \frac{120}{n(n+2)}$  dla  $n \in \mathbb{N}$ . Wiadomo, że wówczas szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest zbieżny, a jego suma jest równa 90.

W każdym z poniższych 10 pytań w miejscu kropek podaj sumę szeregu.

Za każdą poprawną odpowiedź otrzymasz **1 punkt**.

$$5.1. \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1}) = \text{140}$$

$$5.2. \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = \text{40}$$

$$5.3. \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - a_{n+1}^2) = \text{1600}$$

$$5.4. \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - a_{n+2}^2) = \text{1825}$$

$$5.5. \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - a_{n+3}^2) = \text{1889}$$

$$5.6. \sum_{n=4}^{\infty} (2^{a_n} - 2^{a_{n+1}}) = \text{31}$$

$$5.7. \sum_{n=6}^{\infty} (2^{a_n} - 2^{a_{n+1}}) = 4\sqrt{2} - 1$$

$$5.8. \sum_{n=10}^{\infty} (2^{a_n} - 2^{a_{n+1}}) = \text{1}$$

$$5.9. \sum_{n=10}^{\infty} (3^{a_n} - 3^{a_{n+1}}) = \text{2}$$

$$5.10. \sum_{n=10}^{\infty} (4^{a_n} - 4^{a_{n+1}}) = \text{3}$$

### Zadanie 6.

W każdym z poniższych zadań podaj granicę funkcji.

Za każdą poprawną odpowiedź otrzymasz **1 punkt**.

$$6.1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x = \sqrt{e}$$

$$6.2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{x}\right)^x = e^{\sqrt{2}}$$

$$6.3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{\sqrt{16x^2+9}} = \text{1}$$

$$6.4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{16x^2+9}} = e^4$$

$$6.5. \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{3^x} = \text{1}$$

$$6.6. \lim_{x \rightarrow -\infty} 3^{2^x} = \text{1}$$

$$6.7. \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{2^{2^x}} = \text{2}$$

$$6.8. \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{2^{2^{2^x}}} = \text{4}$$

$$6.9. \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{2^{3^{4^x}}} = \text{4}$$

$$6.10. \lim_{x \rightarrow -\infty} 3^{4^{5^{6^x}}} = \text{81}$$

## Zadanie 7.

Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej  $n$  zachodzi nierówność

$$(n+5) \cdot \binom{2n}{n} > 9 \cdot 4^{n-1}.$$

*Rozwiązanie:*

Zamierzamy przeprowadzić dowód indukcyjny.

1° (w tej chwili wydaje nam się, że jest to pierwszy krok indukcyjny) Dla  $n = 1$  mamy

$$(n+5) \cdot \binom{2n}{n} = 6 \cdot 2 = 12$$

oraz

$$9 \cdot 4^{n-1} = 9 \cdot 4^0 = 9,$$

a zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać  $12 > 9$ , jest więc prawdziwa.

2° Niech teraz  $n$  będzie taką liczbą naturalną, że

$$(n+5) \cdot \binom{2n}{n} > 9 \cdot 4^{n-1}.$$

Chcemy wykazać, że

$$(n+6) \cdot \binom{2n+2}{n+1} > 9 \cdot 4^n.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności otrzymujemy

$$\begin{aligned} (n+6) \cdot \binom{2n+2}{n+1} &= \frac{(n+6)(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} = \frac{(n+6)(2n)!(2n+1)(2n+2)}{n!(n+1)n!(n+1)} = \\ &= (n+5) \cdot \binom{2n}{n} \cdot \frac{(n+6)(2n+1)(2n+2)}{(n+5)(n+1)^2} = (n+5) \cdot \binom{2n}{n} \cdot \frac{2(n+6)(2n+1)}{(n+5)(n+1)} > \\ &> 9 \cdot 4^{n-1} \cdot \frac{2(n+6)(2n+1)}{(n+5)(n+1)} \geqslant 9 \cdot 4^{n-1} \cdot 4 = 9 \cdot 4^n, \end{aligned}$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{2(n+6)(2n+1)}{(n+5)(n+1)} \geqslant 4.$$

Powyższa nierówność jest równoważna kolejnym nierównościom

$$\begin{aligned} 2(n+6)(2n+1) &\geqslant 4(n+5)(n+1), \\ (n+6)(2n+1) &\geqslant 2(n+5)(n+1), \\ 2n^2 + n + 12n + 6 &\geqslant 2(n^2 + n + 5n + 5), \\ 2n^2 + 13n + 6 &\geqslant 2n^2 + 12n + 10, \\ n &\geqslant 4. \end{aligned}$$

Drugi krok indukcyjny został więc przeprowadzony tylko dla  $n \geqslant 4$ .

Dla kompletności dowodu należy sprawdzić daną w treści zadania nierówność dla  $n = 2$ ,  $n = 3$  oraz  $n = 4$ . Sprawdzenie dla  $n = 4$  okazuje się przejmować rolę pierwszego kroku indukcyjnego, a sprawdzenie dla  $n = 2$  i  $n = 3$  weryfikuje dowodzoną nierówność w przypadkach, które dotąd nie zostały sprawdzone, ani też nie wynikają z dowodu indukcyjnego.

Dla  $n = 2$  otrzymujemy

$$7 \cdot \binom{4}{2} = 7 \cdot 6 = 42 > 36 = 9 \cdot 4^1.$$

Dla  $n = 3$  otrzymujemy

$$8 \cdot \binom{6}{3} = 8 \cdot 20 = 160 > 144 = 9 \cdot 4^2.$$

1° (to okazuje się być pierwszym krokiem indukcyjnym) Dla  $n = 4$  otrzymujemy

$$9 \cdot \binom{8}{4} = 9 \cdot 70 = 630 = 640 - 10 > 640 - 64 = (10 - 1) \cdot 64 = 9 \cdot 4^3.$$

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 4$ , a ponadto wykonaliśmy bezpośrednie sprawdzenie dla  $n = 1$ ,  $n = 2$  oraz  $n = 3$ .

### Uwagi:

Sprawdzenie dla  $n = 4$  nie wydaje się wymagać wiele pracy, jednak brak świadomości konieczności wykonania tego sprawdzenia jest bardzo poważnym błędem.

Jeśli zamiast nierówności

$$\frac{2(n+6)(2n+1)}{(n+5)(n+1)} \geq 4$$

w rozwiązaniu pojawi się ostra nierówność

$$\frac{2(n+6)(2n+1)}{(n+5)(n+1)} > 4, \tag{1}$$

to w konsekwencji drugi krok indukcyjny zostanie przeprowadzony dla  $n > 4$ . Tym samym konieczne będzie także sprawdzenie dowodzonej nierówności dla  $n = 5$ .

### Punktacja:

**Maksymalna możliwa ocena za rozwiązanie, w którym brak jest świadomości konieczności wykonania sprawdzenia dla  $n = 4$ , to 5 punktów.** To samo, gdy brak jest świadomości konieczności wykonania sprawdzenia dla  $n = 5$ , jeżeli z rozwiązania nie wynika (np. z powodu użycia ostrej nierówności (1)), że została udowodniona implikacja  $T(4) \Rightarrow T(5)$ , gdzie  $T(n)$  jest dowodzoną nierównością. Również rozwiązanie, w którym, nawet z powodu drobnego błędu rachunkowego, nie wykryto, że indukcja nie działa od samego początku, nie może być ocenione na więcej niż **5 punktów**, gdyż wówczas rozwiązujący stracił możliwość wykazania, że wie, co zrobić w przypadku indukcji startującej od  $n > 1$ .

## Zadanie 8.

Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią  $C$  i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej  $n$  zachodzą nierówności

$$C \leq \sqrt[4]{n^4 + 80n^3} - n \leq 10C.$$

*Rozwiązanie:*

*Sposób I*

Ponieważ wyrażenie dane w treści zadania jest różnicą wyrażeń zbliżonej wielkości, zastosujemy wzór na różnicę czwartych potęg w postaci

$$a - b = \frac{a^4 - b^4}{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3},$$

gdzie przy dodatnich  $a, b$  mianownik jest zawsze różny od zera. Otrzymujemy

$$\sqrt[4]{n^4 + 80n^3} - n = \frac{80n^3}{\left(\sqrt[4]{n^4 + 80n^3}\right)^3 + n \cdot \left(\sqrt[4]{n^4 + 80n^3}\right)^2 + n^2 \cdot \sqrt[4]{n^4 + 80n^3} + n^3}. \quad (4 \text{ punkty})$$

Szacujemy ostatnie wyrażenie od dołu, szacując mianownik od góry:

$$\begin{aligned} & \frac{80n^3}{\left(\sqrt[4]{n^4 + 80n^3}\right)^3 + n \cdot \left(\sqrt[4]{n^4 + 80n^3}\right)^2 + n^2 \cdot \sqrt[4]{n^4 + 80n^3} + n^3} \geq \\ & \geq \frac{80n^3}{\left(\sqrt[4]{n^4 + 80n^4}\right)^3 + n \cdot \left(\sqrt[4]{n^4 + 80n^4}\right)^2 + n^2 \cdot \sqrt[4]{n^4 + 80n^4} + n^3} = \\ & = \frac{80n^3}{27n^3 + 9n^3 + 3n^3 + n^3} = \frac{80n^3}{40n^3} = 2 \end{aligned} \quad (3 \text{ punkty})$$

i od góry (szacując mianownik od dołu):

$$\begin{aligned} & \frac{80n^3}{\left(\sqrt[4]{n^4 + 80n^3}\right)^3 + n \cdot \left(\sqrt[4]{n^4 + 80n^3}\right)^2 + n^2 \cdot \sqrt[4]{n^4 + 80n^3} + n^3} \leq \\ & \leq \frac{80n^3}{\left(\sqrt[4]{n^4 + 0}\right)^3 + n \cdot \left(\sqrt[4]{n^4 + 0}\right)^2 + n^2 \cdot \sqrt[4]{n^4 + 0} + n^3} = \frac{80n^3}{4n^3} = 20 = 10 \cdot 2. \end{aligned} \quad (3 \text{ punkty})$$

Otrzymaliśmy więc wymagane oszacowania ze stałą  $C = 2$ .

*Sposób II*

Oznaczamy dane w treści zadania wyrażenie przez  $a_n$  i po zastosowaniu wzoru skróconego mnożenia jak w sposobie I przepisujemy je w postaci

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{80n^3}{\left(\sqrt[4]{n^4 + 80n^3}\right)^3 + n \cdot \left(\sqrt[4]{n^4 + 80n^3}\right)^2 + n^2 \cdot \sqrt[4]{n^4 + 80n^3} + n^3} = \\ &= \frac{80}{\left(\sqrt[4]{1 + \frac{80}{n}}\right)^3 + \left(\sqrt[4]{1 + \frac{80}{n}}\right)^2 + \sqrt[4]{1 + \frac{80}{n}} + 1}. \end{aligned}$$

Ponieważ licznik ostatniego wyrażenia jest stały, a mianownik maleje wraz ze wzrostem  $n$ , ciąg  $(a_n)$  jest rosnący. Stąd wynika, że dla dowolnej liczby naturalnej  $n$  zachodzą nierówności

$$a_1 \leq a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Ponieważ  $a_1 = 2$  oraz  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 20$ , otrzymujemy wymagane oszacowania ze stałą  $C = 2$ .

### Sposób III

Ponieważ wyrażenie dane w treści zadania jest różnicą wyrażeń zbliżonej wielkości, dwukrotnie zastosujemy wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b},$$

gdzie przy dodatnich  $a, b$  mianownik jest zawsze różny od zera. Otrzymujemy

$$\sqrt[4]{n^4 + 80n^3} - n = \frac{\sqrt{n^4 + 80n^3} - n^2}{\sqrt[4]{n^4 + 80n^3} + n} = \frac{80n^3}{\left(\sqrt[4]{n^4 + 80n^3} + n\right) \cdot \left(\sqrt{n^4 + 80n^3} + n^2\right)}. \quad (4 \text{ punkty})$$

Szacujemy ostatnie wyrażenie od dołu, szacując mianownik od góry:

$$\begin{aligned} \frac{80n^3}{\left(\sqrt[4]{n^4 + 80n^3} + n\right) \cdot \left(\sqrt{n^4 + 80n^3} + n^2\right)} &\geq \frac{80n^3}{\left(\sqrt[4]{n^4 + 80n^4} + n\right) \cdot \left(\sqrt{n^4 + 80n^4} + n^2\right)} = \\ &= \frac{80n^3}{4n \cdot 10n^2} = \frac{80n^3}{40n^3} = 2 \end{aligned} \quad (3 \text{ punkty})$$

i od góry (szacując mianownik od dołu):

$$\begin{aligned} &\frac{80n^3}{\left(\sqrt[4]{n^4 + 80n^3} + n\right) \cdot \left(\sqrt{n^4 + 80n^3} + n^2\right)} \leq \\ &\leq \frac{80n^3}{\left(\sqrt[4]{n^4 + 0} + n\right) \cdot \left(\sqrt{n^4 + 0} + n^2\right)} = \frac{80n^3}{2n \cdot 2n^2} = \frac{80n^3}{4n^3} = 20 = 10 \cdot 2. \end{aligned} \quad (3 \text{ punkty})$$

Otrzymaliśmy więc wymagane oszacowania ze stałą  $C = 2$ .

### Sposób IV

Oznaczamy dane w treści zadania wyrażenie przez  $a_n$  i po zastosowaniu wzorów skróconego mnożenia jak w sposobie III przepisujemy je w postaci

$$a_n = \frac{80n^3}{\left(\sqrt[4]{n^4 + 80n^3} + n\right) \cdot \left(\sqrt{n^4 + 80n^3} + n^2\right)} = \frac{80}{\left(\sqrt[4]{1 + \frac{80}{n}} + 1\right) \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{80}{n}} + 1\right)}.$$

Ponieważ licznik ostatniego wyrażenia jest stały, a mianownik maleje wraz ze wzrostem  $n$ , ciąg  $(a_n)$  jest rosnący. Stąd wynika, że dla dowolnej liczby naturalnej  $n$  zachodzą nierówności

$$a_1 \leq a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Ponieważ  $a_1 = 2$  oraz  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 20$ , otrzymujemy wymagane oszacowania ze stałą  $C = 2$ .

## Zadanie 9.

Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{4n}{\sqrt{4n^4 + 4n}} + \frac{4n+3}{\sqrt{4n^4 + 4n+3}} + \frac{4n+6}{\sqrt{4n^4 + 4n+6}} + \frac{4n+9}{\sqrt{4n^4 + 4n+9}} + \frac{4n+12}{\sqrt{4n^4 + 4n+12}} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{19n-9}{\sqrt{4n^4 + 19n-9}} + \frac{19n-6}{\sqrt{4n^4 + 19n-6}} + \frac{19n-3}{\sqrt{4n^4 + 19n-3}} + \frac{19n}{\sqrt{4n^4 + 19n}} \right).$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez  $b_n$ . Zamierzamy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach, co wymaga oszacowania  $b_n$  od góry i od dołu przez ciągi zbieżne do wspólnej granicy.

Zauważmy, że składniki tej sumy bardzo się różnią – iloraz ostatniego składnika do pierwszego dąży do  $19/4$  przy  $n$  dążącym do nieskończoności. Należy zatem oczekiwać, że oszacowanie sumy poprzez wspólne oszacowanie składników (i przemnożenie tego oszacowania przez liczbę składników), będzie prowadzić do oszacowań mających różne granice, co uniemożliwi skorzystanie z twierdzenia o trzech ciągach.

Zauważmy też, że za tak znaczną różnicę wielkości składników odpowiadają liczniki, podczas gdy mianowniki mają zbliżoną wielkość. Liczniki tworzą jednak postęp arytmetyczny, którego sumę bez problemu możemy obliczyć. W konsekwencji będziemy szacować mianowniki przez wspólną wielkość, nie zmieniając liczników, a następnie dodamy składniki powstałe w wyniku tego oszacowania.

I tak, szacowanie od góry (czyli szacowanie mianowników od dołu) prowadzi do

$$b_n \leq \frac{4n}{\sqrt{4n^4 + 4n}} + \frac{4n+3}{\sqrt{4n^4 + 4n}} + \frac{4n+6}{\sqrt{4n^4 + 4n}} + \frac{4n+9}{\sqrt{4n^4 + 4n}} + \dots + \frac{19n}{\sqrt{4n^4 + 4n}} = \\ = \frac{4n + (4n+3) + (4n+6) + (4n+9) + \dots + 19n}{\sqrt{4n^4 + 4n}} = c_n \quad (3 \text{ punkty})$$

Z kolei szacowanie od dołu (czyli szacowanie mianowników od góry) prowadzi do

$$b_n \geq \frac{4n}{\sqrt{4n^4 + 19n}} + \frac{4n+3}{\sqrt{4n^4 + 19n}} + \frac{4n+6}{\sqrt{4n^4 + 19n}} + \frac{4n+9}{\sqrt{4n^4 + 19n}} + \dots + \frac{19n}{\sqrt{4n^4 + 19n}} = \\ = \frac{4n + (4n+3) + (4n+6) + (4n+9) + \dots + 19n}{\sqrt{4n^4 + 19n}} = a_n. \quad (3 \text{ punkty})$$

Ze wzoru na sumę postępu arytmetycznego otrzymujemy

$$4n + (4n+3) + (4n+6) + (4n+9) + \dots + 19n = (5n+1) \cdot \frac{4n+19n}{2} = \frac{23n \cdot (5n+1)}{2},$$

(kolejne 2 punkty, a pozostałe 2 punkty za resztę rozwiązania)

gdzie

$$5n+1 = \frac{19n-4n}{3} + 1$$

jest liczbą wyrazów powyższego postępu (o różnicy 3).

Wobec tego

$$c_n = \frac{23n \cdot (5n+1)}{2 \cdot \sqrt{4n^4 + 4n}} = \frac{23 \cdot \left(5 + \frac{1}{n}\right)}{2 \cdot \sqrt{4 + \frac{4}{n^3}}} \rightarrow \frac{115}{4}$$

przy  $n \rightarrow \infty$  i podobnie

$$a_n = \frac{23n \cdot (5n+1)}{2 \cdot \sqrt{4n^4+19n}} = \frac{23 \cdot \left(5 + \frac{1}{n}\right)}{2 \cdot \sqrt{4 + \frac{19}{n^3}}} \rightarrow \frac{115}{4}.$$

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej  $n$  zachodzą nierówności

$$a_n \leq b_n \leq c_n,$$

a ponadto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{115}{4}$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{115}{4},$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{115}{4}.$$

**Odpowiedź:** Wartość granicy podanej w treści zadania jest równa  $115/4$ .

**Maksymalnie 3 punkty za rozwiązanie z oszacowaniami postaci: liczba składników razy wspólne oszacowanie składników.**

## Zadanie 10.

Dana jest funkcja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  spełniająca warunki

$$|f(x) - f(y)| \leq 10 \cdot |x - y| \quad \text{dla dowolnych } x, y \in \mathbb{R}$$

oraz

$$|f(x+10) - f(x)| \leq 10 \quad \text{dla dowolnego } x \in \mathbb{R}.$$

Udowodnić jedną z następujących dwóch nierówności:

$$|f(17) - f(0)| \leq 50, \quad (\text{wersja trudniejsza za 10 punktów})$$

$$|f(17) - f(0)| \leq 80. \quad (\text{wersja łatwiejsza za 6 punktów})$$

*Rozwiązanie:*

*Wersja łatwiejsza*

Na mocy założeń o funkcji  $f$  otrzymujemy nierówność

$$|f(10) - f(0)| \leq 10 \quad (2 \text{ punkty})$$

oraz

$$|f(17) - f(10)| \leq 10 \cdot |17 - 10| = 70. \quad (2 \text{ punkty})$$

Korzystając z nierówności trójkąta oraz z powyższych dwóch nierówności otrzymujemy

$$\begin{aligned} |f(17) - f(0)| &= |(f(17) - f(10)) + (f(10) - f(0))| \leq \\ &\leq |f(17) - f(10)| + |f(10) - f(0)| \leq 70 + 10 = 80, \end{aligned} \quad (2 \text{ punkty})$$

co kończy rozwiązanie zadania.

*Wersja trudniejsza*

Na mocy założeń o funkcji  $f$  otrzymujemy nierówność

$$|f(10) - f(0)| \leq 10, \quad (2 \text{ punkty})$$

$$|f(20) - f(10)| \leq 10 \quad (2 \text{ punkty})$$

oraz

$$|f(17) - f(20)| \leq 10 \cdot |17 - 20| = 30. \quad (3 \text{ punkty})$$

Korzystając z nierówności trójkąta oraz z powyższych trzech nierówności otrzymujemy

$$\begin{aligned} |f(17) - f(0)| &= |(f(17) - f(20)) + (f(20) - f(10)) + (f(10) - f(0))| \leq \\ &\leq |f(17) - f(20)| + |f(20) - f(10)| + |f(10) - f(0)| \leq 30 + 10 + 10 = 50, \end{aligned} \quad (3 \text{ punkty})$$

co kończy rozwiązanie zadania.

## Zadanie 11.

Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n)! \cdot x^{6n}}{(2n)! \cdot n^{pn}} \quad (2)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej parametru  $p$ , aby promień ten był dodatni i skończony.

*Rozwiązanie:*

Stosujemy kryterium d'Alemberta do szeregu (2) traktowanego jako szereg liczbowy z parametrem  $x \neq 0$ .

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \left| \frac{(4n+4)! \cdot x^{6n+6}}{(2n+2)! \cdot (n+1)^{pn+2p}} \cdot \frac{(2n)! \cdot n^{pn}}{(4n)! \cdot x^{6n}} \right| &= \frac{(4n+1) \cdot (4n+2) \cdot (4n+3) \cdot (4n+4) \cdot x^6}{(2n+1) \cdot (2n+2) \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{pn} \cdot (n+1)^p} = \\ (5 \text{ punktów}) \quad &= \frac{(4n+1) \cdot (4n+2) \cdot (4n+3) \cdot 2}{(2n+1) \cdot (n+1)^p} \cdot \frac{x^6}{\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right)^p} \rightarrow 64 \cdot \frac{x^6}{e^p} \end{aligned}$$

przy  $n \rightarrow \infty$ , o ile  $p=2$ , bo tylko dla  $p=2$  pierwszy czynnik powyższego iloczynu ma granicę rzeczywistą dodatnią.

Tak więc zastosowanie kryterium d'Alemberta prowadzi do granicy ilorazów kolejnych wyrazów równej  $\frac{64}{e^2} \cdot x^6$  dla  $p=2$ . (**razem 8 punktów**)

Jeżeli  $\frac{64}{e^2} \cdot x^6 < 1$ , czyli  $|x| < \frac{\sqrt[3]{e}}{2}$ , to szereg (2) jest zbieżny.

Jeżeli zaś  $\frac{64}{e^2} \cdot x^6 > 1$ , czyli  $|x| > \frac{\sqrt[3]{e}}{2}$ , to szereg (2) jest rozbieżny.

Stąd wniosek, że promień zbieżności szeregu potęgowego (2) jest równy  $\frac{\sqrt[3]{e}}{2}$ .

**Odpowiedź:** Dany w zadaniu szereg potęgowy ma dla  $p=2$  promień zbieżności  $\frac{\sqrt[3]{e}}{2}$ .

**Uwaga:**

Jeżeli w obliczeniach nie pojawia się liczba  $e$ , można uzyskać maksymalnie **2 punkty**.

## Zadanie 12.

Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (10n+4) \cdot (10n+14)}{(10n+11) \cdot (10n+21) \cdot (10n+31)}.$$

*Rozwiązanie:*

Szereg jest zbieżny. Aby to udowodnić, skorzystamy z kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

W tym celu musimy zweryfikować prawdziwość trzech założeń tego kryterium.

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne - oczywiste.

2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.

Sprawdzamy to następująco:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(10n+4) \cdot (10n+14)}{(10n+11) \cdot (10n+21) \cdot (10n+31)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(10 + \frac{4}{n}\right) \cdot \left(10 + \frac{14}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}}{\left(10 + \frac{11}{n}\right) \cdot \left(10 + \frac{21}{n}\right) \cdot \left(10 + \frac{31}{n}\right)} = \\ &= \frac{10 \cdot 10 \cdot 0}{10 \cdot 10 \cdot 10} = 0. \end{aligned}$$

3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.

Ten warunek jest najmniej oczywisty. Aby go udowodnić, powinniśmy wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej  $n$  zachodzi nierówność

$$\frac{(10n+4) \cdot (10n+14)}{(10n+11) \cdot (10n+21) \cdot (10n+31)} \geq \frac{(10n+14) \cdot (10n+24)}{(10n+21) \cdot (10n+31) \cdot (10n+41)},$$

co kolejno jest równoważne nierównościom

$$\begin{aligned} \frac{10n+4}{10n+11} &\geq \frac{10n+24}{10n+41}, \\ (10n+4) \cdot (10n+41) &\geq (10n+11) \cdot (10n+24), \\ 100n^2 + 410n + 40n + 164 &\geq 100n^2 + 240n + 110n + 264, \\ 100n^2 + 450n + 164 &\geq 100n^2 + 350n + 264, \\ 100n &\geq 100, \\ n &\geq 1. \end{aligned}$$

Zatem dowodzona nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej  $n$ .

W konsekwencji szereg dany w treści zadania jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.