

ANALIZA 1A, KOŁOKWIUM nr **007**, 30.01.2015, godz. 10.15-13.00

Wykład: J. Wróblewski

PODCZAS KOŁOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie **17.** (10 punktów)

Dowieść, że liczba $\log_{30} 150$ jest niewymierna.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\log_{30} 150$ jest wymierna i niech m/n będzie jej przedstawieniem w postaci ilorazu liczb naturalnych (zauważmy, że jest to liczba dodatnia). Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\log_{30} 150 = \frac{m}{n}$$

$$30^{m/n} = 150$$

$$30^m = 150^n.$$

Dalszą część dowodu można przeprowadzić dwoma sposobami.

Sposób I

Rozkładając obie strony powyższej równości na iloczyny potęg liczb pierwszych otrzymujemy

$$2^m \cdot 3^m \cdot 5^m = 2^n \cdot 3^n \cdot 5^{2n}.$$

Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze wynika, że wykładniki przy odpowiednich potęgach liczb pierwszych po obu stronach równości są równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} m = n \\ m = n \\ m = 2n \end{cases}$$

Jednak powyższy układ równań nie ma rozwiązań w liczbach dodatnich m, n , gdyż wówczas mielibyśmy

$$m = 2n > n = m.$$

Możliwa jest też inna argumentacja: rozwiązujemy powyższy układ równań w liczbach rzeczywistych otrzymując jedyne rozwiązanie $m = n = 0$ i stwierdzamy, że nie jest to rozwiązanie w liczbach naturalnych.

Doszliśmy więc do sprzeczności z założeniem, że liczba $\log_{30} 150$ jest wymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $\log_{30} 150$ jest niewymierna.

Sposób II

Ponieważ dowolna potęga liczby 30 ma ostatnią niezerową cyfrę 1, 3, 7, lub 9, a w potęgach liczby 150 ostatnia niezerowa cyfra jest równa 5, równanie $30^m = 150^n$ nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych m, n .

Doszliśmy więc do sprzeczności z założeniem, że liczba $\log_{30} 150$ jest wymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $\log_{30} 150$ jest niewymierna.

Zadanie 18. (10 punktów)

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n^5 + 1}{\sqrt{18n^{18} + 1}} + \frac{5n^5 + 2}{\sqrt{18n^{18} + 2}} + \frac{5n^5 + 3}{\sqrt{18n^{18} + 3}} + \frac{5n^5 + 4}{\sqrt{18n^{18} + 4}} + \dots + \frac{5n^5 + 4n^4}{\sqrt{18n^{18} + 4n^4}} \right).$$

Rozwiązanie:

Dana pod znakiem granicy suma ma $4n^4$ składników i zapisuje się wzorem

$$b_n = \sum_{k=1}^{4n^4} \frac{5n^5 + k}{\sqrt{18n^{18} + k}}.$$

Szacowanie od góry daje

$$\sum_{k=1}^{4n^4} \frac{5n^5 + k}{\sqrt{18n^{18} + k}} \leq \sum_{k=1}^{4n^4} \frac{5n^5 + 4n^4}{\sqrt{18n^{18} + 0}} = \frac{4n^4(5n^5 + 4n^4)}{3\sqrt{2} \cdot n^9} = c_n.$$

Szacując od dołu otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{4n^4} \frac{5n^5 + k}{\sqrt{18n^{18} + k}} \geq \sum_{k=1}^{4n^4} \frac{5n^5 + 0}{\sqrt{18n^{18} + 4n^4}} = \frac{4n^4 \cdot 5n^5}{\sqrt{18n^{18} + 4n^4}} = a_n.$$

Ponieważ dla dowolnego n zachodzą nierówności

$$a_n \leq b_n \leq c_n,$$

a ponadto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{20n^9}{\sqrt{18n^{18} + 4n^4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{20}{\sqrt{18 + 4n^{-14}}} = \frac{20}{\sqrt{18}} = \frac{10\sqrt{2}}{3}$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^4 \cdot (5n^5 + 4n^4)}{3\sqrt{2} \cdot n^9} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot (5 + 4n^{-1})}{3\sqrt{2}} = \frac{20}{3\sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{2}}{3},$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{10\sqrt{2}}{3}.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu granica istnieje i jest równa $\frac{10\sqrt{2}}{3}$.

Zadanie 19. (10 punktów)

Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$n \cdot \binom{3n}{n} > 6^{n-1}.$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n = 1$ mamy

$$L = 1 \cdot \binom{3}{1} = 1 \cdot 3 = 3$$

oraz

$$P = 6^{1-1} = 6^0 = 1.$$

Zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $3 > 1$, jest więc prawdziwa.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$n \cdot \binom{3n}{n} > 6^{n-1}. \quad (\clubsuit)$$

Wykażemy, że wówczas zachodzi nierówność

$$(n+1) \cdot \binom{3n+3}{n+1} > 6^n. \quad (\diamond)$$

Zauważmy najpierw, że lewą stronę nierówności $(\clubsuit)$ można zapisać jako

$$n \cdot \binom{3n}{n} = n \cdot \frac{(3n)!}{n! \cdot (2n)!} = \frac{(3n)!}{(n-1)! \cdot (2n)!}.$$

Przekształcając lewą stronę nierówności $(\diamond)$ i korzystając z założenia indukcyjnego $(\clubsuit)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} L &= (n+1) \cdot \binom{3n+3}{n+1} = (n+1) \cdot \frac{(3n+3)!}{(n+1)! \cdot (2n+2)!} = \frac{(3n+3)!}{n! \cdot (2n+2)!} = \\ &= \frac{(3n)!}{(n-1)! \cdot (2n)!} \cdot \frac{(3n+1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+3)}{n \cdot (2n+1) \cdot (2n+2)} > 6^{n-1} \cdot \frac{(3n+1) \cdot (3n+2) \cdot 3}{n \cdot (2n+1) \cdot 2} \geqslant \\ &\geqslant 6^{n-1} \cdot 6 = 6^n = P, \end{aligned}$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{(3n+1) \cdot (3n+2) \cdot 3}{n \cdot (2n+1) \cdot 2} \geqslant 6. \quad (\heartsuit)$$

Nierówność $(\heartsuit)$ jest równoważna kolejnym nierównościom

$$(3n+1) \cdot (3n+2) \cdot 3 \geqslant 6 \cdot n \cdot (2n+1) \cdot 2,$$

$$(3n+1) \cdot (3n+2) \geqslant 4 \cdot n \cdot (2n+1),$$

$$9n^2 + 9n + 2 \geqslant 8n^2 + 4n,$$

$$n^2 + 5n + 2 \geqslant 0,$$

a zatem nierówność ($\heartsuit$) jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n .

Tym samym udowodniliśmy, że dla każdej liczby naturalnej n z nierówności ($\clubsuit$) wynika nierówność ($\diamondsuit$).

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej n .

Zadanie **20.** (10 punktów)

Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{\sqrt{25n^2 + 24} - 5n}{\sqrt{9n^2 + 40} - 3n} \leq 2C.$$

Rozwiązanie:

Ponieważ zarówno w liczniku, jak i w mianowniku wyrażenia danego w treści zadania występują różnice wyrażeń zbliżonej wielkości, zastosujemy dwukrotnie wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b}.$$

Otrzymujemy

$$\frac{\sqrt{25n^2 + 24} - 5n}{\sqrt{9n^2 + 40} - 3n} = \frac{24 \cdot (\sqrt{9n^2 + 40} + 3n)}{40 \cdot (\sqrt{25n^2 + 24} + n)}.$$

Szacujemy ostatnie wyrażenie od góry

$$\frac{24 \cdot (\sqrt{9n^2 + 40} + 3n)}{40 \cdot (\sqrt{25n^2 + 24} + 5n)} \leq \frac{24 \cdot (\sqrt{9n^2 + 40n^2} + 3n)}{40 \cdot (\sqrt{25n^2 + 0} + 5n)} = \frac{24 \cdot (7n + 3n)}{40 \cdot (5n + 5n)} = \frac{24 \cdot 10n}{40 \cdot 10n} = \frac{3}{5}$$

i od dołu

$$\frac{24 \cdot (\sqrt{9n^2 + 40} + 3n)}{40 \cdot (\sqrt{25n^2 + 24} + 5n)} \geq \frac{24 \cdot (\sqrt{9n^2 + 0} + 3n)}{40 \cdot (\sqrt{25n^2 + 24n^2} + 5n)} = \frac{24 \cdot (3n + 3n)}{40 \cdot (7n + 5n)} = \frac{24 \cdot 6n}{40 \cdot 12n} = \frac{3}{10}.$$

Otrzymaliśmy więc wymagane oszacowania ze stałą $C = 3/10$.

Zadanie 21. (10 punktów)

Rozstrzygnąć zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (5n+4) \cdot (5n+9)}{(3n+5) \cdot (3n+8) \cdot (3n+11)}$.

Rozwiązanie:

Szereg jest zbieżny. Aby to udowodnić, skorzystamy z kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

W tym celu musimy zweryfikować prawdziwość trzech założeń tego kryterium.

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne - oczywiste.

2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.

Sprawdzamy to następująco:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(5n+4) \cdot (5n+9)}{(3n+5) \cdot (3n+8) \cdot (3n+11)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(5 + \frac{4}{n}\right) \cdot \left(5 + \frac{9}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}}{\left(3 + \frac{5}{n}\right) \cdot \left(3 + \frac{8}{n}\right) \cdot \left(3 + \frac{11}{n}\right)} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 0}{3 \cdot 3 \cdot 3} = 0.$$

3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.

Ten warunek jest najmniej oczywisty. Aby go udowodnić, powinniśmy wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\frac{(5n+4) \cdot (5n+9)}{(3n+5) \cdot (3n+8) \cdot (3n+11)} \geq \frac{(5n+9) \cdot (5n+14)}{(3n+8) \cdot (3n+11) \cdot (3n+14)},$$

co kolejno jest równoważne nierównościom

$$\frac{5n+4}{3n+5} \geq \frac{5n+14}{3n+14},$$

$$(5n+4) \cdot (3n+14) \geq (5n+14) \cdot (3n+5),$$

$$15n^2 + 70n + 12n + 56 \geq 15n^2 + 25n + 42n + 70,$$

$$15n^2 + 82n + 56 \geq 15n^2 + 67n + 70,$$

$$15n \geq 14,$$

$$n \geq \frac{14}{15}.$$

Zatem dowodzona nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n .

W konsekwencji szereg dany w treści zadania jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

Zadanie 22. (10 punktów)

Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-10)^{n^2} \cdot x^{3n}}{n^{n^2}}.$$

Rozwiązanie:

Stosujemy do danego w zadaniu szeregu potęgowego kryterium Cauchy'ego:

$$\sqrt[n]{\frac{|n-10|^{n^2} \cdot |x|^{3n}}{n^{n^2}}} = \frac{|n-10|^n \cdot |x|^3}{n^n} = \left|1 - \frac{10}{n}\right|^n \cdot |x|^3 \rightarrow e^{-10} \cdot |x|^3,$$

gdzie ostatnia zbieżność ma miejsce przy $n \rightarrow +\infty$. Należy w tym miejscu wyjaśnić, że dla $n \geq 10$ mamy

$$\left|1 - \frac{10}{n}\right|^n = \left(1 - \frac{10}{n}\right)^n,$$

skąd

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left|1 - \frac{10}{n}\right|^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{10}{n}\right)^n = e^{-10}.$$

Szereg jest więc zbieżny, gdy $e^{-10} \cdot |x|^3 < 1$, czyli $|x| < e^{10/3}$, natomiast jest rozbieżny, gdy $e^{-10} \cdot |x|^3 > 1$, czyli $|x| > e^{10/3}$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg potęgowy ma promień zbieżności $e^{10/3}$.

Zadanie 23. (10 punktów)

Wyznaczyć wszystkie pary parametrów rzeczywistych (a, b) , gdzie $a < b$, dla których funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{dla } x < a \\ |x^2 - 5| & \text{dla } a \leq x < b \\ 4 & \text{dla } b \leq x \end{cases}$$

jest ciągła.

Rozwiązanie:

Oczywiście funkcja f jest ciągła w każdym punkcie różnym od a i b .

Ponadto

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = 4$$

oraz

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = |a^2 - 5|,$$

skąd wynika, że funkcja f jest ciągła w punkcie a wtedy i tylko wtedy, gdy

$$4 = |a^2 - 5|.$$

Przekształcanie powyższego równania prowadzi kolejno do

$$a^2 - 5 = \pm 4,$$

$$a^2 = 5 \pm 4,$$

skąd $a \in \{-3, -1, 1, 3\}$.

Podobnie

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = |b^2 - 5|$$

oraz

$$f(b) = \lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = 4,$$

skąd wynika, że funkcja f jest ciągła w punkcie b wtedy i tylko wtedy, gdy

$$4 = |b^2 - 5|,$$

czyli $b \in \{-3, -1, 1, 3\}$.

Zatem funkcja f jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy $a, b \in \{-3, -1, 1, 3\}$, co w połączeniu z warunkiem $a < b$ prowadzi do sześciu par (a, b) spełniających warunki zadania.

Odpowiedź: Warunki zadania są spełnione przez pary $(-3, -1)$, $(-3, 1)$, $(-3, 3)$, $(-1, 1)$, $(-1, 3)$, $(1, 3)$.

Zadanie 24. (10 punktów)

W każdym z zadań **24.1-24.9** podaj (w postaci uproszczonej) kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** lub **NIE**).

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz 1 punkt.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz przynależność jednego z nich do zbioru, otrzymasz 0.5 punktu.

Za poprawne rozwiązanie wszystkich dziewięciu zadań otrzymasz **dziesiąty punkt**.

24.1. $A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} : n \in \mathbb{N} \right\}$	Ocena
$\inf A = -1/2$	$\sup A = 1/5$
Czy kres dolny należy do zbioru A TAK	Czy kres górny należy do zbioru A TAK
24.2. $B = \left\{ \frac{(-1)^n}{n^2 + 4} : n \in \mathbb{N} \right\}$	Ocena
$\inf B = -1/5$	$\sup B = 1/8$
Czy kres dolny należy do zbioru B TAK	Czy kres górny należy do zbioru B TAK
24.3. $C = \left\{ \frac{(-1)^n}{n^2 + 9} : n \in \mathbb{N} \right\}$	Ocena
$\inf C = -1/10$	$\sup C = 1/13$
Czy kres dolny należy do zbioru C TAK	Czy kres górny należy do zbioru C TAK
24.4. $D = \{x^2 : x \in (-10, 3)\}$	Ocena
$\inf D = 0$	$\sup D = 100$
Czy kres dolny należy do zbioru D TAK	Czy kres górny należy do zbioru D NIE
24.5. $E = \{x^3 : x \in (-10, 3)\}$	Ocena
$\inf E = -1000$	$\sup E = 27$
Czy kres dolny należy do zbioru E NIE	Czy kres górny należy do zbioru E NIE
24.6. $F = \{x^4 : x \in (-10, 3)\}$	Ocena
$\inf F = 0$	$\sup F = 10000$
Czy kres dolny należy do zbioru F TAK	Czy kres górny należy do zbioru F NIE
24.7. $G = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 25n^2 \leq m^2 \leq 33n^2 \right\}$	Ocena
$\inf G = 5$	$\sup G = \sqrt{33}$
Czy kres dolny należy do zbioru G TAK	Czy kres górny należy do zbioru G NIE
24.8. $H = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 33n^2 \leq m^2 \leq 41n^2 \right\}$	Ocena
$\inf H = \sqrt{33}$	$\sup H = \sqrt{41}$
Czy kres dolny należy do zbioru H NIE	Czy kres górny należy do zbioru H NIE
24.9. $I = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 41n^2 \leq m^2 \leq 49n^2 \right\}$	Ocena
$\inf I = \sqrt{41}$	$\sup I = 7$
Czy kres dolny należy do zbioru I NIE	Czy kres górny należy do zbioru I TAK