

11	12	Σ

Nazwisko

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

0

Imię

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Indeks

--	--	--	--	--	--	--	--

ANALIZA 1A, KOŁOKWIUM nr **3**, **22.12.2014**, godz. 10.15-11.00

Wykład: J. Wróblewski

PODCZAS KOŁOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie **11**. (10 punktów)

Dobrać odpowiednie liczby wymierne dodatnie C oraz $D \leq 11C$ i udowodnić, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{x^{2014} + 2}{8x^{2014} + 3} \leq D.$$

Rozwiązanie:

Sposób I (rzemieślniczy, ale skuteczny):

Dla liczb rzeczywistych x spełniających nierówność $|x| \geq 1$ wykonujemy standardowe szacowania od góry i od dołu oparte na nierównościach $0 \leq 1 \leq x^{2014}$:

$$\frac{1}{11} = \frac{x^{2014} + 0}{8x^{2014} + 3x^{2014}} \leq \frac{x^{2014} + 2}{8x^{2014} + 3} \leq \frac{x^{2014} + 2x^{2014}}{8x^{2014} + 0} = \frac{3}{8}.$$

Z kolei dla liczb x spełniających nierówność $|x| < 1$ analogiczne szacowanie musi uwzględnić odwrócenie kierunku nierówności między potęgami liczby x , gdyż wtedy zachodzą nierówności $0 \leq x^{2014} \leq 1$. Szacowania wyglądają wówczas następująco:

$$\frac{2}{11} = \frac{0 + 2}{8 + 3} \leq \frac{x^{2014} + 2}{8x^{2014} + 3} \leq \frac{1 + 2}{0 + 3} = 1.$$

Z powyższych oszacowań wynikają nierówności

$$C \leq \frac{x^{2014} + 2}{8x^{2014} + 3} \leq D,$$

gdzie $C = \min(1/11, 2/11) = 1/11$ oraz $D = \max(3/8, 1) = 1 = 11C$.

Sposób II (nieco trikowy i prostszy rachunkowo, ale trudny do zastosowania dla bardziej skomplikowanych wyrażeń):

Wykonujemy szacowania na poziomie licznika w taki sposób, aby w liczniku otrzymać współczynniki proporcjonalne do współczynników w mianowniku:

$$\frac{1}{8} = \frac{x^{2014} + \frac{3}{8}}{8x^{2014} + 3} \leq \frac{x^{2014} + 2}{8x^{2014} + 3} \leq \frac{\frac{16}{3}x^{2014} + 2}{8x^{2014} + 3} = \frac{2}{3}.$$

Z powyższych oszacowań wynikają nierówności

$$C \leq \frac{x^{2014} + 2}{8x^{2014} + 3} \leq D,$$

gdzie $C = 1/8$ oraz $D = 2/3 = \frac{16}{3}C < 11C$.

Sposób III (analogiczny do sposobu II, tylko szacujemy mianownik zamiast licznika):

Wykonujemy szacowania na poziomie mianownika w taki sposób, aby w mianowniku otrzymać współczynniki proporcjonalne do współczynników w liczniku:

$$\frac{1}{8} = \frac{x^{2014} + 2}{8x^{2014} + 16} \leq \frac{x^{2014} + 2}{8x^{2014} + 3} \leq \frac{x^{2014} + 2}{\frac{3}{2}x^{2014} + 3} = \frac{2}{3},$$

co prowadzi do identycznych oszacowań jak w sposobie II.

Sposób IV (w duchu podobny do sposobów II i III, ale trochę bardziej naturalny i dający pełną kontrolę nad zbiorem wartości danego wyrażenia):

Przepisujemy dane w zadaniu wyrażenie w postaci zawierającej zmienną x tylko w jednym miejscu:

$$\frac{x^{2014} + 2}{8x^{2014} + 3} = \frac{x^{2014} + \frac{3}{8} + \frac{13}{8}}{8x^{2014} + 3} = \frac{1}{8} + \frac{\frac{13}{8}}{8x^{2014} + 3}. \quad (\clubsuit)$$

Mianownik ostatniego składnika przyjmuje wszystkie wartości z przedziału $[3, +\infty)$, a zatem iloraz $\frac{13/8}{8x^{2014} + 3}$ przyjmuje wszystkie wartości z przedziału $(0, 13/24]$. W konsekwencji zbiór możliwych wartości wyrażenia $(\clubsuit)$ jest przedziałem $(1/8, 2/3]$.

Zatem zachodzą nierówności

$$\frac{1}{8} < \frac{x^{2014} + 2}{8x^{2014} + 3} \leq \frac{2}{3},$$

których nie można poprawić.

Rozwiązanie jest zakończone ze stałymi C i D jak w sposobach II i III.

Zadanie **12.** (10 punktów)

Niech $a_n = \frac{60}{n(n+1)}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wiadomo, że wówczas szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, a jego suma jest równa 60.

W każdym z poniższych 10 pytań w miejscu kropek podaj sumę szeregu.

Za każdą poprawną odpowiedź otrzymasz **1 punkt**.

12.1. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1}) =$ **90**

12.2. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) =$ **30**

12.3. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 \cdot a_n) =$ **1800**

12.4. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_2 \cdot a_n) =$ **600**

12.5. $\sum_{n=3}^{\infty} a_n =$ **20**

12.6. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^3 - a_{n+1}^3) =$ **27000**

12.7. $\sum_{n=1}^{\infty} ((a_n - a_{n+1}) \cdot (a_n + a_{n+1})) =$ **900**

12.8. $\sum_{n=3}^{\infty} (2^{a_n} - 2^{a_{n+1}}) =$ **31**

12.9. $\sum_{n=4}^{\infty} (2^{a_n} - 2^{a_{n+1}}) =$ **7**

12.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{a_n^2 + 1600} - \sqrt{a_{n+1}^2 + 1600} \right) =$ **10**