

15	16	Σ

Nazwisko

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

0

Imię

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Indeks

--	--	--	--	--	--	--	--

ANALIZA 1A, KOŁOKWIUM nr 4, 26.01.2015, godz. 10.15-11.00

Wykład: J. Wróblewski

PODCZAS KOŁOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie **15.** (10 punktów)

Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n^3} \cdot x^{n^3}}{(n!)^{n^2}}.$$

Rozwiązanie:

Stosujemy kryterium Cauchy'ego do danego w zadaniu szeregu:

$$\sqrt[n]{\left| \frac{(n+1)^{n^3} \cdot x^{n^3}}{(n!)^{n^2}} \right|} = \frac{(n+1)^{n^2} \cdot |x|^{n^2}}{(n!)^n} = b_n.$$

Następnie stosujemy kryterium Cauchy'ego do ciągu (b_n) :

$$\sqrt[n]{b_n} = \sqrt[n]{\frac{(n+1)^{n^2} \cdot |x|^{n^2}}{(n!)^n}} = \frac{(n+1)^n \cdot |x|^n}{n!} = c_n.$$

Teraz stosujemy kryterium d'Alemberta do ciągu (c_n) , przy założeniu $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{c_{n+1}}{c_n} &= \frac{(n+2)^{n+1} \cdot |x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(n+1)^n \cdot |x|^n} = \frac{(n+2)^{n+1} \cdot |x|}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^{n+1} \cdot |x| = \\ &= \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1} \cdot |x| \rightarrow e \cdot |x| \end{aligned}$$

przy $n \rightarrow \infty$.

Jeżeli $e \cdot |x| < 1$, czyli $|x| < 1/e$, to na podstawie kryterium d'Alemberta zastosowanego do ciągu (c_n) wnioskujemy, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0 < 1,$$

skąd na podstawie kryterium Cauchy'ego zastosowanego do ciągu (b_n) otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 < 1,$$

wobec czego w oparciu o kryterium Cauchy'ego zastosowane do szeregu potęgowego danego w treści zadania wnioskujemy, że szereg ten jest zbieżny.

Jeżeli zaś $e \cdot |x| > 1$, czyli $|x| > 1/e$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = +\infty > 1$, wobec czego $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty > 1$, skąd wynika, że szereg potęgowy jest rozbieżny.

Zatem szereg potęgowy ma promień zbieżności $1/e$.

Odpowiedź: Promień zbieżności danego szeregu potęgowego jest równy $1/e$.

Zadanie 16. (10 punktów)

W każdym z zadań **16.1-16.9** podaj (w postaci uproszczonej) kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** lub **NIE**).

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz 1 punkt.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz przynależność jednego z nich do zbioru, otrzymasz 0.5 punktu.

Za poprawne rozwiązanie wszystkich dziewięciu zadań otrzymasz **dziesiąty punkt**.

16.1. $A = \left\{ \frac{1}{n^2 - 6} : n \in \mathbb{N} \right\}$	Ocena
$\inf A = -1/2$	$\sup A = 1/3$
Czy kres dolny należy do zbioru A TAK	Czy kres górny należy do zbioru A TAK
16.2. $B = \left\{ \frac{1}{n^2 - 30} : n \in \mathbb{N} \right\}$	Ocena
$\inf B = -1/5$	$\sup B = 1/6$
Czy kres dolny należy do zbioru B TAK	Czy kres górny należy do zbioru B TAK
16.3. $C = \left\{ \frac{1}{n^2 - 120} : n \in \mathbb{N} \right\}$	Ocena
$\inf C = -1/20$	$\sup C = 1$
Czy kres dolny należy do zbioru C TAK	Czy kres górny należy do zbioru C TAK
16.4. $D = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 3^n \leq 4^m \leq 8^n \right\}$	Ocena
$\inf D = \log_4 3$	$\sup D = 3/2$
Czy kres dolny należy do zbioru D NIE	Czy kres górny należy do zbioru D TAK
16.5. $E = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 2^n \leq 8^m \leq 9^n \right\}$	Ocena
$\inf E = 1/3$	$\sup E = \log_8 9$
Czy kres dolny należy do zbioru E TAK	Czy kres górny należy do zbioru E NIE
16.6. $F = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 15^n \leq 16^m \leq 32^n \right\}$	Ocena
$\inf F = \log_{16} 15$	$\sup F = 5/4$
Czy kres dolny należy do zbioru F NIE	Czy kres górny należy do zbioru F TAK
16.7. $G = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 27^n \leq \left(\frac{m}{n} \right)^m \leq 2^{8n} \right\}$	Ocena
$\inf G = 3$	$\sup G = 4$
Czy kres dolny należy do zbioru G TAK	Czy kres górny należy do zbioru G TAK
16.8. $H = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 3^{3n} \leq \left(\frac{m}{n} \right)^m \leq 2^{24n} \right\}$	Ocena
$\inf H = 3$	$\sup H = 8$
Czy kres dolny należy do zbioru H TAK	Czy kres górny należy do zbioru H TAK
16.9. $I = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 4^{4n} \leq \left(\frac{m}{n} \right)^m \leq 2^{64n} \right\}$	Ocena
$\inf I = 4$	$\sup I = 16$
Czy kres dolny należy do zbioru I TAK	Czy kres górny należy do zbioru I TAK