

ANALIZA 1A, KOŁOKWIUM nr **9, 30.01.2015**, godz. 10.15-13.00

Wykład: J. Wróblewski

PODCZAS KOŁOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie **25.** (10 punktów)

Wyznaczyć (wraz z uzasadnieniem) kresy zbioru

$$\left\{ \frac{1}{5^m - 3^n} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Rozwiązanie:

Każdy dodatni element zbioru jest postaci $1/k$, gdzie $k = 5^m - 3^n > 0$. Największy element otrzymamy dla najmniejszej możliwej dodatniej liczby k . Ponieważ liczba k jest całkowita dodatnia i parzysta, musi zachodzić $k \geq 2$. Zauważmy przy tym, że dla $m = n = 1$ w istocie $k = 2$. Zatem liczba $1/2$ jest największym elementem zbioru.

Podobnie, każdy ujemny element zbioru jest postaci $1/k$, gdzie $k = 5^m - 3^n < 0$. Najmniejszy element otrzymamy dla największej możliwej ujemnej liczby k . Ponieważ liczba k jest całkowita ujemna i parzysta, musi zachodzić $k \leq -2$. Zauważmy przy tym, że dla $m = 2, n = 3$ w istocie $k = 25 - 27 = -2$. Zatem liczba $-1/2$ jest najmniejszym elementem zbioru.

Odpowiedź: Kres dolny danego zbioru jest równy $-1/2$, a kres górny $1/2$.

Zadanie 26. (10 punktów)

Wyznaczyć (wraz z uzasadnieniem) sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4n}.$$

Rozwiązanie:

Szukamy takich liczb A i B , że

$$\frac{1}{n^2 + 4n} = \frac{1}{n(n+4)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+4}.$$

Po wymnożeniu prawej równości stronami przez $n(n+4)$ otrzymujemy

$$1 = A(n+4) + Bn.$$

Dla $n=0$ otrzymujemy $A=1/4$, natomiast przyjęcie $n=-4$ daje $B=-1/4$.

Zatem N -ta suma częściowa danego szeregu wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2 + 4n} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+4} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} \right) + \dots + \left(\frac{1}{N-4} - \frac{1}{N} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{N-3} - \frac{1}{N+1} \right) + \left(\frac{1}{N-2} - \frac{1}{N+2} \right) + \left(\frac{1}{N-1} - \frac{1}{N+3} \right) + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+4} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2} - \frac{1}{N+3} - \frac{1}{N+4} \right), \end{aligned}$$

co przy N dążącym do $+\infty$ zbiega do

$$\frac{1}{4} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{12+6+4+3}{12} = \frac{1}{4} \cdot \frac{25}{12} = \frac{25}{48}.$$

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg ma sumę równą $25/48$.

Zadanie 27. (10 punktów)

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{4n^2+1} + \sqrt{9n^2+1} + \sqrt{16n^2+1} + \sqrt{25n^2+1} + \sqrt{36n^2+1} + \dots + \sqrt{n^4+1}}{n^k}$$

dla tak dobranej wartości naturalnej parametru k , aby granica ta była liczbą rzeczywistą dodatnią.

Rozwiązanie:

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez b_n . Zamierzamy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach, co wymaga oszacowania b_n od góry i od dołu przez ciągi zbieżne do wspólnej granicy.

Zauważmy, że składniki sumy występującej w liczniku bardzo się różnią – iloraz pierwszego składnika do ostatniego dąży do 0 przy n dążącym do nieskończoności. Należy zatem oczekiwać, że oszacowanie sumy poprzez wspólne oszacowanie składników (i przemnożenie tego oszacowania przez liczbę składników), będzie prowadzić do oszacowań mających różne granice, co uniemożliwi skorzystanie z twierdzenia o trzech ciągach.

Staramy się więc tak oszacować poszczególne składniki, aby po pierwsze oszacowanie nie było zbyt grube, a po drugie, aby można było się pozbyć pierwiastków.

I tak, delikatne szacowanie od dołu prowadzi do sumy postępu arytmetycznego w liczniku:

$$\begin{aligned} b_n &\geq \frac{\sqrt{n^2+0} + \sqrt{4n^2+0} + \sqrt{9n^2+0} + \sqrt{16n^2+0} + \sqrt{25n^2+0} + \dots + \sqrt{n^4+0}}{n^k} = \\ &= \frac{n + 2n + 3n + 4n + 5n + \dots + n^2}{n^k} = \frac{n \cdot \frac{n+n^2}{2}}{n^k} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{2 \cdot n^{k-3}} = a_n \rightarrow \frac{1}{2} \end{aligned}$$

przy $n \rightarrow \infty$ dla $k = 3$.

Oszacowanie od góry przeprowadzamy według schematu $\sqrt{x^2+1} \leq \sqrt{x^2+2x+1}$ otrzymując kolejno:

$$\begin{aligned} b_n &\leq \frac{\sqrt{n^2+2n+1} + \sqrt{4n^2+4n+1} + \sqrt{9n^2+6n+1} + \dots + \sqrt{n^4+2n^2+1}}{n^k} = \\ &= \frac{(n+1) + (2n+1) + (3n+1) + \dots + (n^2+1)}{n^k} = \frac{n \cdot \frac{(n+1)+(n^2+1)}{2}}{n^k} = \frac{1 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{2 \cdot n^{k-3}} = c_n \rightarrow \frac{1}{2} \end{aligned}$$

przy $n \rightarrow \infty$ dla $k = 3$.

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$a_n \leq b_n \leq c_n,$$

a ponadto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{1}{2},$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{2}.$$

Odpowiedź: Wartość granicy podanej w treści zadania jest równa $1/2$ dla $k = 3$.

Zadanie 28. (10 punktów)

Dana jest taka funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y spełniony jest warunek

$$|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2.$$

Dowieść, że wówczas dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^4.$$

Rozwiązanie:

Wykażemy, że jedynymi funkcjami spełniającymi założenia zadania są funkcje stałe. Stąd bezpośrednio wynika nierówność podana w tezie zadania, gdyż jej lewa strona jest równa 0, a prawa jest nieujemna.

Ustalmy dowolne liczby rzeczywiste x, y . Dla dowolnej liczby naturalnej n przyjmijmy

$$t_0 = x, \quad t_1 = x + \frac{y-x}{n}, \quad t_2 = x + 2 \cdot \frac{y-x}{n}, \quad t_3 = x + 3 \cdot \frac{y-x}{n}, \quad t_4 = x + 4 \cdot \frac{y-x}{n}, \quad \dots$$
$$\dots, \quad t_{n-2} = x + (n-2) \cdot \frac{y-x}{n}, \quad t_{n-1} = x + (n-1) \cdot \frac{y-x}{n}, \quad t_n = x + n \cdot \frac{y-x}{n} = y.$$

Powyższe punkty dzielą odcinek osi liczbowej od x do y na n równych części.

Wówczas na mocy założenia o funkcji f zachodzą nierówności

$$|f(t_0) - f(t_1)| \leq (t_0 - t_1)^2 = \left(\frac{y-x}{n}\right)^2 = \frac{(x-y)^2}{n^2},$$
$$|f(t_1) - f(t_2)| \leq (t_1 - t_2)^2 = \left(\frac{y-x}{n}\right)^2 = \frac{(x-y)^2}{n^2},$$
$$|f(t_2) - f(t_3)| \leq (t_2 - t_3)^2 = \left(\frac{y-x}{n}\right)^2 = \frac{(x-y)^2}{n^2},$$

.....

$$|f(t_{n-2}) - f(t_{n-1})| \leq (t_{n-2} - t_{n-1})^2 = \left(\frac{y-x}{n}\right)^2 = \frac{(x-y)^2}{n^2},$$
$$|f(t_{n-1}) - f(t_n)| \leq (t_{n-1} - t_n)^2 = \left(\frac{y-x}{n}\right)^2 = \frac{(x-y)^2}{n^2}.$$

Korzystając z nierówności trójkąta oraz z powyższych nierówności otrzymujemy

$$|f(x) - f(y)| =$$
$$= |(f(t_0) - f(t_1)) + (f(t_1) - f(t_2)) + (f(t_2) - f(t_3)) + \dots + (f(t_{n-1}) - f(t_n))| \leq$$
$$\leq |f(t_0) - f(t_1)| + |f(t_1) - f(t_2)| + |f(t_2) - f(t_3)| + \dots + |f(t_{n-1}) - f(t_n)| \leq$$
$$\leq \frac{(x-y)^2}{n^2} + \frac{(x-y)^2}{n^2} + \frac{(x-y)^2}{n^2} + \dots + \frac{(x-y)^2}{n^2} = \frac{(x-y)^2}{n}.$$

Otrzymaliśmy więc nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{(x-y)^2}{n}$$

prawdziwą dla dowolnej liczby naturalnej n . Ponieważ lewa strona tej nierówności jest nieujemna i nie zależy od n , a prawa może osiągać dowolnie małe wartości dodatnie, otrzymujemy $|f(x) - f(y)| = 0$. Stąd wynika, że $f(x) = f(y)$, a w konsekwencji f jest funkcją stałą.

Zadanie **29.** (10 punktów)

Ciąg (a_n) o wyrazach rzeczywistych spełnia dla każdej liczby naturalnej n nierówność

$$|a_n - a_{n+1}| < \frac{1}{n}.$$

Rozstrzygnąć, czy stąd wynika, że ciąg (a_n) jest zbieżny.

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Nie wynika.

Rozważmy bowiem ciąg sum częściowych szeregu harmonicznego

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Wówczas dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$|a_n - a_{n+1}| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n},$$

a przy tym ciąg (a_n) jest rozbieżny.

Zadanie **30.** (10 punktów)

Przy każdym z poniższych 26 zdań w miejscu kropek postaw jedną z liter **P**, **F**, **N**:

P - jest **P**rawdą (tzn. musi być prawdziwe)

F - jest **F**ałszem (tzn. musi być fałszywe)

N - może być prawdziwe lub fałszywe (tzn. Nie wiadomo, czasem bywa prawdziwe, a czasem fałszywe)

Za podanie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\max(0, n - 16)$ punktów.

O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że

- $T(1)$ jest prawdziwe,
- dla każdej liczby naturalnej n zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(2n)$,
- dla każdej liczby naturalnej $n > 7$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n - 7)$.

Co można wywnioskować o prawdziwości zdania:

a) $T(770)$ **N**

b) $T(771)$ **P**

c) $T(772)$ **P**

d) $T(773)$ **N**

e) $T(774)$ **P**

f) $T(775)$ **N**

g) $T(776)$ **N**

h) $T(777)$ **N**

i) $T(71) \Rightarrow T(772)$ **P**

j) $T(72) \Rightarrow T(773)$ **N**

k) $T(73) \Rightarrow T(774)$ **P**

l) $T(74) \Rightarrow T(775)$ **N**

m) $T(75) \Rightarrow T(776)$ **P**

n) $T(76) \Rightarrow T(777)$ **N**

o) $T(73) \Rightarrow T(775)$ **P**

p) $T(73) \Rightarrow T(776)$ **P**

q) $T(77) \Rightarrow T(777)$ **P**

r) $T(77) \Rightarrow T(774)$ **P**

s) $T(77) \Rightarrow T(775)$ **N**

t) $T(77) \Rightarrow T(776)$ **N**

u) $T(72) \Rightarrow T(777)$ **N**

v) $T(73) \Rightarrow T(777)$ **N**

w) $T(71) \Rightarrow T(773)$ **N**

x) $T(74) \Rightarrow T(773)$ **N**

y) $T(75) \Rightarrow T(773)$ **P**

z) $T(76) \Rightarrow T(773)$ **P**