

1

Nazwisko

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

 0

Imię

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

 Indeks

--	--	--	--	--	--	--	--

ANALIZA 1A, SPRAWDZIAN nr 1, 20.10.2014, godz. 10.15-10.35
Wykład: J. Wróblewski
PODCZAS SPRAWDZIANU NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie 1. (10 punktów)

Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$n \cdot \binom{2n}{n}^2 \geq 4^{2n-1}.$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n = 1$ mamy

$$L = 1 \cdot \binom{2}{1}^2 = 1 \cdot 2^2 = 4$$

oraz

$$P = 4^{2 \cdot 1 - 1} = 4^1 = 4.$$

Zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $4 \geq 4$, jest więc prawdziwa.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$n \cdot \binom{2n}{n}^2 \geq 4^{2n-1}. \quad (\clubsuit)$$

Wykażemy, że wówczas zachodzi nierówność

$$(n+1) \cdot \binom{2n+2}{n+1}^2 \geq 4^{2n+1}. \quad (\diamond)$$

Zauważmy najpierw, że lewą stronę nierówności $(\clubsuit)$ można zapisać jako

$$n \cdot \binom{2n}{n}^2 = n \cdot \left(\frac{(2n)!}{n! \cdot n!} \right)^2 = n \cdot \frac{((2n)!)^2}{(n!)^4} = \frac{((2n)!)^2}{(n-1)! \cdot (n!)^3}.$$

Przekształcając lewą stronę nierówności $(\diamond)$ i korzystając z założenia indukcyjnego $(\clubsuit)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} L &= (n+1) \cdot \binom{2n+2}{n+1}^2 = (n+1) \cdot \frac{((2n+2)!)^2}{((n+1)!)^4} = (n+1) \cdot \frac{((2n)!)^2 \cdot (2n+1)^2 \cdot (2n+2)^2}{(n-1)! \cdot n \cdot (n!)^3 \cdot (n+1)^4} = \\ &= \frac{((2n)!)^2}{(n-1)! \cdot (n!)^3} \cdot (n+1) \cdot \frac{(2n+1)^2 \cdot (2n+2)^2}{n \cdot (n+1)^4} = \frac{((2n)!)^2}{(n-1)! \cdot (n!)^3} \cdot \frac{(2n+1)^2 \cdot 2^2}{n \cdot (n+1)} \geq \\ &\geq 4^{2n-1} \cdot \frac{4 \cdot (2n+1)^2}{n \cdot (n+1)} \geq 4^{2n-1} \cdot 4^2 = 4^{2n+1} = P, \end{aligned}$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{4 \cdot (2n+1)^2}{n \cdot (n+1)} \geq 4^2. \quad (\heartsuit)$$

Nierówność $(\heartsuit)$ jest równoważna kolejnym nierównościom

$$4 \cdot (2n+1)^2 \geq 4^2 \cdot n \cdot (n+1),$$

$$(2n+1)^2 \geq 4 \cdot n \cdot (n+1),$$

$$4n^2 + 4n + 1 \geq 4n^2 + 4n,$$

$$1 \geq 0,$$

a zatem nierówność $(\heartsuit)$ jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n .

Tym samym udowodniliśmy, że dla każdej liczby naturalnej n z nierówności $(\clubsuit)$ wynika nierówność $(\diamondsuit)$.

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej n .