

Nazwisko

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

0

Imię

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Indeks

--	--	--	--	--	--	--	--

ANALIZA 1A, SPRAWDZIAN nr **6, 15.12.2014**, godz. 10.15-10.35

Wykład: J. Wróblewski

PODCZAS SPRAWDZIANU NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie **10.** (10 punktów)Rozstrzygnąć zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (4n-3) \cdot (4n+1) \cdot (4n+5)}{(3n-2) \cdot (3n+1) \cdot (3n+4) \cdot (3n+7)}$.

Rozwiązanie:

Szereg jest zbieżny. Aby to udowodnić, skorzystamy z kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

W tym celu musimy zweryfikować prawdziwość trzech założeń tego kryterium.

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne - oczywiste.

2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.

Sprawdzamy to następująco:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4n-3) \cdot (4n+1) \cdot (4n+5)}{(3n-2) \cdot (3n+1) \cdot (3n+4) \cdot (3n+7)} &= \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(4 - \frac{3}{n}\right) \cdot \left(4 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(4 + \frac{5}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}}{\left(3 - \frac{2}{n}\right) \cdot \left(3 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(3 + \frac{4}{n}\right) \cdot \left(3 + \frac{7}{n}\right)} &= \frac{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 0}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = 0. \end{aligned}$$

3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.

Ten warunek jest najmniej oczywisty. Aby go udowodnić, powinniśmy wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\frac{(4n-3) \cdot (4n+1) \cdot (4n+5)}{(3n-2) \cdot (3n+1) \cdot (3n+4) \cdot (3n+7)} \geq \frac{(4n+1) \cdot (4n+5) \cdot (4n+9)}{(3n+1) \cdot (3n+4) \cdot (3n+7) \cdot (3n+10)},$$

co kolejno jest równoważne nierównościom

$$\begin{aligned} \frac{4n-3}{3n-2} &\geq \frac{4n+9}{3n+10}, \\ (4n-3) \cdot (3n+10) &\geq (4n+9) \cdot (3n-2), \\ 12n^2 + 40n - 9n - 30 &\geq 12n^2 - 8n + 27n - 18, \\ 12n^2 + 31n - 30 &\geq 12n^2 + 19n - 18, \\ 12n &\geq 12, \\ n &\geq 1. \end{aligned}$$

Zatem dowodzona nierówność jest prawdziwa dla wszystkich liczb naturalnych n .

W konsekwencji szereg dany w treści zadania jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.