

13	14	Σ

Nazwisko

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

0

Imię

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Indeks

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

ANALIZA 1A, SPRAWDZIAN nr 78, 19.01.2015, godz. 10.15-11.00

Wykład: J. Wróblewski

PODCZAS SPRAWDZIANU NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie 13. (10 punktów)

Dana jest funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \sqrt[4]{x^2 + 10^4}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{20}.$$

Rozwiązanie:

Skorzystamy ze wzoru skróconego mnożenia

$$a^4 - b^4 = (a^2 - b^2) \cdot (a^2 + b^2) = (a - b) \cdot (a + b) \cdot (a^2 + b^2),$$

który przy założeniu $a + b \neq 0$ można zapisać w postaci

$$a - b = \frac{a^4 - b^4}{(a + b) \cdot (a^2 + b^2)}.$$

Przyjmując $a = \sqrt[4]{x^2 + 10^4}$ oraz $b = \sqrt[4]{y^2 + 10^4}$, zauważamy, że $a + b > 0$ i przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \sqrt[4]{x^2 + 10^4} - \sqrt[4]{y^2 + 10^4} \right| = \\ &= \left| \frac{(x^2 + 10^4) - (y^2 + 10^4)}{\left(\sqrt[4]{x^2 + 10^4} + \sqrt[4]{y^2 + 10^4} \right) \cdot \left(\sqrt{x^2 + 10^4} + \sqrt{y^2 + 10^4} \right)} \right| = \\ &= \frac{|x^2 - y^2|}{\left(\sqrt[4]{x^2 + 10^4} + \sqrt[4]{y^2 + 10^4} \right) \cdot \left(\sqrt{x^2 + 10^4} + \sqrt{y^2 + 10^4} \right)} = \\ &= \frac{|x - y| \cdot |x + y|}{\left(\sqrt[4]{x^2 + 10^4} + \sqrt[4]{y^2 + 10^4} \right) \cdot \left(\sqrt{x^2 + 10^4} + \sqrt{y^2 + 10^4} \right)}. \end{aligned}$$

Korzystając z nierówności trójkąta i wykorzystując równość $|x| = \sqrt{x^2}$ otrzymujemy:

$$|x + y| \leq |x| + |y| = \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} < \sqrt{x^2 + 10^4} + \sqrt{y^2 + 10^4},$$

skąd

$$\frac{|x + y|}{\sqrt{x^2 + 10^4} + \sqrt{y^2 + 10^4}} < 1.$$

Ponadto zauważamy, że

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x^2 + 10^4} + \sqrt[4]{y^2 + 10^4}} \leq \frac{1}{\sqrt[4]{0 + 10^4} + \sqrt[4]{0 + 10^4}} = \frac{1}{10 + 10} = \frac{1}{20}.$$

Wykorzystanie tych nierówności pozwala dokończyć oszacowania:

$$\begin{aligned} & \frac{|x-y| \cdot |x+y|}{\left(\sqrt[4]{x^2+10^4} + \sqrt[4]{y^2+10^4}\right) \cdot \left(\sqrt{x^2+10^4} + \sqrt{y^2+10^4}\right)} = \\ & = |x-y| \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{x^2+10^4} + \sqrt[4]{y^2+10^4}} \cdot \frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+10^4} + \sqrt{y^2+10^4}} \leqslant |x-y| \cdot \frac{1}{20} \cdot 1 = \frac{|x-y|}{20}. \end{aligned}$$

Zadanie 14. (10 punktów)

Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$(n+4) \cdot \binom{2n}{n} > 2^{2n+1}.$$

Rozwiązanie:

Zamierzamy przeprowadzić dowód indukcyjny.

1° (w tej chwili wydaje nam się, że jest to pierwszy krok indukcyjny) Dla $n = 1$ mamy

$$(n+4) \cdot \binom{2n}{n} = 5 \cdot 2 = 10$$

oraz

$$2^{2n+1} = 2^3 = 8,$$

a zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $10 > 8$, jest więc prawdziwa.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$(n+4) \cdot \binom{2n}{n} > 2^{2n+1}.$$

Chcemy wykazać, że

$$(n+5) \cdot \binom{2n+2}{n+1} > 2^{2n+3}.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności otrzymujemy

$$\begin{aligned} (n+5) \cdot \binom{2n+2}{n+1} &= \frac{(n+5)(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} = \frac{(n+5)(2n)!(2n+1)(2n+2)}{n!(n+1)n!(n+1)} = \\ &= (n+4) \cdot \binom{2n}{n} \cdot \frac{(n+5)(2n+1)(2n+2)}{(n+4)(n+1)^2} = (n+4) \cdot \binom{2n}{n} \cdot \frac{2(n+5)(2n+1)}{(n+4)(n+1)} > \\ &> 2^{2n+1} \cdot \frac{2(n+5)(2n+1)}{(n+4)(n+1)} \geqslant 2^{2n+1} \cdot 4 = 2^{2n+3}, \end{aligned}$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{2(n+5)(2n+1)}{(n+4)(n+1)} \geqslant 4.$$

Powyższa nierówność jest równoważna kolejnym nierównościom

$$2(n+5)(2n+1) \geqslant 4(n+4)(n+1),$$

$$(n+5)(2n+1) \geqslant 2(n+4)(n+1),$$

$$2n^2 + n + 10n + 5 \geqslant 2(n^2 + n + 4n + 4),$$

$$2n^2 + 11n + 5 \geqslant 2n^2 + 10n + 8,$$

$$n \geqslant 3.$$

Drugi krok indukcyjny został więc przeprowadzony tylko dla $n \geqslant 3$.

Dla kompletności dowodu należy sprawdzić daną w treści zadania nierówność dla $n = 2$ oraz dla $n = 3$. Sprawdzenie dla $n = 3$ okazuje się przejmować rolę pierwszego kroku indukcyjnego, a sprawdzenie dla $n = 2$ weryfikuje dowodzoną nierówność w przypadku, który dotąd nie został sprawdzony, ani też nie wynika z dowodu indukcyjnego.

Dla $n = 2$ otrzymujemy

$$6 \cdot \binom{4}{2} = 6 \cdot 6 = 36 > 32 = 2^5.$$

1° (to okazuje się być pierwszym krokiem indukcyjnym) Dla $n = 3$ otrzymujemy

$$7 \cdot \binom{6}{3} = 7 \cdot 20 = 140 > 128 = 2^7.$$

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej $n \geq 3$, a ponadto wykonaliśmy bezpośrednio sprawdzenie dla $n = 1$ oraz dla $n = 2$.

Uwagi:

Sprawdzenie dla $n = 3$ nie wydaje się wymagać wiele pracy, jednak brak świadomości konieczności wykonania tego sprawdzenia jest bardzo poważnym błędem.

Jeśli zamiast nierówności

$$\frac{2(n+5)(2n+1)}{(n+4)(n+1)} \geq 4$$

w rozwiązaniu pojawi się ostra nierówność

$$\frac{2(n+5)(2n+1)}{(n+4)(n+1)} > 4, \quad (\spadesuit)$$

to w konsekwencji drugi krok indukcyjny zostanie przeprowadzony dla $n > 3$. Tym samym konieczne będzie także sprawdzenie dowodzonej nierówności dla $n = 4$.

Maksymalna możliwa ocena za rozwiązanie, w którym brak jest świadomości konieczności wykonania sprawdzenia dla $n = 3$, to 4 punkty. To samo, gdy brak jest świadomości konieczności wykonania sprawdzenia dla $n = 4$, jeżeli z rozwiązania nie wynika (np. z powodu użycia ostrej nierówności $(\spadesuit)$), że została udowodniona implikacja $T(3) \Rightarrow T(4)$, gdzie $T(n)$ jest dowodzoną nierównością.