

768. Niech $z = \frac{3}{5} + \frac{4i}{5}$. Dla podanych liczb m, n podać taką liczbę całkowitą k , aby zachodziła równość $z^m \cdot \bar{z}^n = z^k$. Uwaga na sprzężenie w drugim czynniku po lewej stronie.

- a) $m = 10, \quad n = 1, \quad k = \mathbf{9}$;
- b) $m = 15, \quad n = 2, \quad k = \mathbf{13}$;
- c) $m = 20, \quad n = 3, \quad k = \mathbf{17}$;
- d) $m = 50, \quad n = 4, \quad k = \mathbf{46}$.

Rozwiązanie:

Ponieważ $|z| = 1$, zachodzi równość $\bar{z} = z^{-1}$, a w konsekwencji $\bar{z}^n = z^{-n}$. Zatem poprawna odpowiedź to $k = m - n$.

769. Dla podanej liczby zespolonej z podać najmniejszą liczbę naturalną $n > 1$ taką, że $z^n = z$.

- a) $z = i, \quad n = \mathbf{5}$;
- b) $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad n = \mathbf{9}$;
- c) $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i, \quad n = \mathbf{4}$;
- d) $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}, \quad n = \mathbf{13}$.

Rozwiązanie:

Podane liczby zespolone mają moduł 1 i argumenty odpowiednio: $\pi/2, \pi/4, 2\pi/3, -\pi/6$, skąd wynika, że są one pierwiastkami z jedności odpowiednio stopni 4, 8, 3 i 12.

770. Rozwiązać równanie

$$z\bar{z} = z + \bar{z}$$

w liczbach zespolonych. Opisać, jaką figurą geometryczną na płaszczyźnie zespolonej jest zbiór rozwiązań.

Rozwiązanie:

Sposób I

Przekształcając dane w treści zadania równanie otrzymujemy kolejno równania równoważne:

$$z\bar{z} - z - \bar{z} = 0,$$

$$z\bar{z} - z - \bar{z} + 1 = 1,$$

$$(z-1)(\bar{z}-1) = 1,$$

$$(z-1)\overline{(z-1)} = 1,$$

$$|z-1|^2 = 1,$$

$$|z-1| = 1,$$

skąd wynika, że zbiorem rozwiązań jest zbiór liczb odległych na płaszczyźnie zespolonej o 1 od liczby 1, czyli okrąg o środku 1 i promieniu 1.

Sposób II

Po podstawieniu $z = x + yi$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, dane w zadaniu równanie przyjmuje kolejno postać:

$$(x + yi)(x - yi) = x + yi + x - yi,$$

$$x^2 + y^2 = 2x,$$

$$x^2 - 2x + y^2 = 0,$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1,$$

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1,$$

a zatem zbiorem rozwiązań jest okrąg o promieniu 1 i środku $(x, y) = (1, 0)$, czyli $z = 1$.

771. Czy nierówność $|z + 1| < |z - 4|$ jest prawdziwa dla liczby zespolonej

- a) $z = \log_2 3 + i \cdot \log_3 7$; **NIE**
- b) $z = \log_3 5 + i \cdot \log_4 9$; **TAK**
- c) $z = \log_4 8 + i \cdot \log_5 12$; **NIE**
- d) $z = \log_5 11 + i \cdot \log_6 14$; **TAK**

772. Czy równość $\bar{z}^2 = z^{-2}$ (uwaga na sprzężenie po lewej stronie) jest prawdziwa dla liczby zespolonej

- a) $z = \sqrt{\log_6 2} + i \cdot \sqrt{\log_6 3}$; **TAK**
- b) $z = \sqrt{\log_{12} 3} + i \cdot \sqrt{\log_{12} 4}$; **TAK**
- c) $z = \sqrt{\log_{18} 4} + i \cdot \sqrt{\log_{18} 5}$; **NIE**
- d) $z = \sqrt{\log_{30} 5} + i \cdot \sqrt{\log_{30} 6}$; **TAK**

773. Czy równość $z^{13} = z$ jest prawdziwa dla liczby zespolonej

- a) $z = -i$; **TAK**
- b) $z = \frac{\sqrt{3} - i}{2}$; **TAK**
- c) $z = \frac{1 + i}{\sqrt{2}}$; **NIE**
- d) $z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$; **TAK**

774. Czy równość $\bar{z}^{13} = z^{-13}$ (uwaga na sprzężenie po lewej stronie) jest prawdziwa dla liczby zespolonej

- a) $z = \frac{3 + 4i}{5}$; **TAK**
- b) $z = \frac{5 + 8i}{9}$; **NIE**
- c) $z = \frac{5 + i\sqrt{23}}{8}$; **NIE**
- d) $z = \frac{6 + i\sqrt{13}}{7}$; **TAK**

775. Czy podana liczba zespolona spełnia równanie $z^6 = -64$

- a) $z = 1 + i\sqrt{3}$; **NIE**
- b) $z = -1 + i\sqrt{3}$; **NIE**
- c) $z = \sqrt{3} + i$; **TAK**
- d) $z = -\sqrt{3} + i$; **TAK**

776. Niech $R(m, n)$ będzie liczbą takich liczb zespolonych z , że

$$(z^m - 1) \cdot (z^n - 1) = 0.$$

Czy wtedy

- a) $R(2, 3) = 5$; **NIE**
- b) $R(3, 4) = 6$; **TAK**
- c) $R(4, 6) = 8$; **TAK**
- d) $R(3, 6) = 8$; **NIE**

777. Czy dla podanych liczb zespolonych z_1, z_2, z_3 istnieje taka liczba zespolona z , że

$$|z - z_1| = |z - z_2| = |z - z_3|$$

- a) $z_1 = 1 + i, z_2 = 2 + 2i, z_3 = 13 + 4i$; **TAK**
- b) $z_1 = 1 + i, z_2 = 2 + 2i, z_3 = 8 + 8i$; **NIE**
- c) $z_1 = 1 + i, z_2 = 2 + 2i, z_3 = 5 + 9i$; **TAK**
- d) $z_1 = 1 + i, z_2 = 2 + 2i, z_3 = 7 + 11i$; **TAK**

778. Czy podana liczba zespolona z spełnia nierówność $|z - 1| \leq |z - 3|$

- a) $z = \log_2 3 + i \cdot \log_2 7$ **TAK**
- b) $z = \log_2 7 + i \cdot \log_2 5$ **NIE**
- c) $z = \log_2 3 + i \cdot \log_2 11$ **TAK**
- d) $z = \log_2 5 + i \cdot \log_2 13$ **NIE**

779. Czy podana liczba zespolona z spełnia nierówność $|z - i| \leq |z - 5i|$

- a) $z = \log_2 3 + i \cdot \log_2 7$ **TAK**
- b) $z = \log_2 7 + i \cdot \log_2 5$ **TAK**
- c) $z = \log_2 3 + i \cdot \log_2 11$ **NIE**
- d) $z = \log_2 5 + i \cdot \log_2 13$ **NIE**

780. Czy podana liczba zespolona z spełnia równanie $\bar{z} = z^{-1}$

- a) $z = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$ **TAK**
- b) $z = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i$ **NIE**
- c) $z = 2 + 3i$ **NIE**
- d) $z = 3 + 4i$ **NIE**

781. Czy podana liczba zespolona z spełnia równanie $z^6 = 1$

- a) $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ **NIE**
- b) $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ **NIE**
- c) $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ **TAK**
- d) $z = i$ **NIE**

782. Czy podana liczba zespolona z spełnia równanie $z^8 = 1$

a) $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ **TAK**

b) $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ **NIE**

c) $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ **NIE**

d) $z = i$ **TAK**

783. Czy nierówność $|z - 1| < |z - 5|$ jest prawdziwa dla

a) $z = 1 + i$ **TAK** b) $z = 2 + 2i$ **TAK** c) $z = 3 + 3i$ **NIE** d) $z = 4 + 4i$ **NIE**

784. Czy nierówność $|z| < |z - 4i|$ jest prawdziwa dla

a) $z = 1 + i$ **TAK** b) $z = 2 + 2i$ **NIE** c) $z = 3 + 3i$ **NIE** d) $z = 4 + 4i$ **NIE**

785. Czy nierówność $|z - 5 - 5i| < |z + 1 + i|$ jest prawdziwa dla

a) $z = 1 + i$ **NIE** b) $z = 2 + 2i$ **NIE** c) $z = 3 + 3i$ **TAK** d) $z = 4 + 4i$ **TAK**

786. Czy nierówność $|z - 7| < |z - 7i|$ jest prawdziwa dla

a) $z = 1 + i$ **NIE** b) $z = 2 + 2i$ **NIE** c) $z = 3 + 3i$ **NIE** d) $z = 4 + 4i$ **NIE**

787. Czy liczba $(\sqrt{3} + i)^n$ jest rzeczywista dla

a) $n = 2012$ **NIE** b) $n = 2013$ **NIE** c) $n = 2014$ **NIE** d) $n = 2016$ **TAK**

788. Czy liczba $(1 - \sqrt{3} \cdot i)^n$ jest rzeczywista dla

a) $n = 2012$ **NIE** b) $n = 2013$ **TAK** c) $n = 2014$ **NIE** d) $n = 2016$ **TAK**

789. Czy liczba $(-1 + i)^n$ jest rzeczywista dla

a) $n = 2012$ **TAK** b) $n = 2013$ **NIE** c) $n = 2014$ **NIE** d) $n = 2016$ **TAK**

Na każde z poniższych 12 pytań udziel odpowiedzi **TAK/NIE**.

Czy zespolony szereg potęgowy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ jest zbieżny dla

790. $z = 1$ **NIE**

791. $z = -1$ **TAK**

792. $z = i$ **TAK**

793. $z = \frac{3+4i}{5}$ **TAK**

794. $z = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$ **TAK**

795. $z = \frac{\sqrt{3}-i}{2}$ **TAK**

796. $z = \frac{5+5i}{7}$ **NIE**

797. $z = \frac{7-4i}{8}$ **NIE**

798. $z = \frac{2+2i}{3}$ **TAK**

799. $z = \frac{4\sqrt{5}}{9}$ **TAK**

800. $z = 3i \cdot \log_{26} 3$ **NIE**

801. $z = 2i \cdot \log_{26} 5$ **TAK**