

Indukcja matematyczna (c.d.)**Ćwiczenia 10.10.2014: zad. 31-45**

Osoby, które uzyskały na teście mniej niż 60 punktów oraz osoby, które nie wiedzą od razu jak się zabierać za poniższe zadania, powinny przyjść na ćwiczenia. Pozostali mogą ograniczyć się do rozwiązania tych zadań we własnym zakresie.

31. O zdaniu¹ $T(n)$ udowodniono, że prawdziwe jest $T(1)$, oraz że dla dowolnego $n \geq 6$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+2)$. Czy można stąd wnioskować, że

- a) prawdziwe jest $T(10)$,
- b) prawdziwe jest $T(11)$,
- c) prawdziwa jest implikacja $T(7) \Rightarrow T(13)$,
- d) prawdziwa jest implikacja $T(3) \Rightarrow T(1)$,
- e) prawdziwa jest implikacja $T(1) \Rightarrow T(3)$.

32. O zdaniu $T(n)$ udowodniono, że prawdziwe są $T(1)$ i $T(100)$, oraz że dla dowolnego $n \geq 10$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n-1)$. Czy można stąd wnioskować, że

- a) prawdziwe jest $T(9)$,
- b) prawdziwe jest $T(10)$,
- c) prawdziwa jest implikacja $T(50) \Rightarrow T(30)$,
- d) prawdziwa jest implikacja $T(300) \Rightarrow T(200)$,
- e) prawdziwa jest implikacja $T(30) \Rightarrow T(50)$,
- f) prawdziwa jest implikacja $T(200) \Rightarrow T(300)$.

33. O zdaniu $T(n)$ udowodniono, że prawdziwe jest $T(1)$, oraz że dla dowolnego $n \geq 1$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+2)$. Czy można stąd wnioskować, że

- a) prawdziwe jest $T(9)$,
- b) prawdziwe jest $T(10)$,
- c) prawdziwa jest implikacja $T(100) \Rightarrow T(25)$,
- d) prawdziwa jest implikacja $T(100) \Rightarrow T(200)$.

34. O zdaniu $T(n)$ udowodniono, że prawdziwe są $T(1)$ i $T(6)$, oraz że dla dowolnego $n \geq 1$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+3)$. Czy można stąd wnioskować, że

- a) fałszywe jest $T(3)$,
- b) fałszywe jest $T(11)$,
- c) prawdziwe jest $T(9)$,
- d) dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n prawdziwe jest $T(n^2)$.

35. O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że $T(7)$ jest fałszywe, $T(17)$ jest prawdziwe, a ponadto dla każdej liczby naturalnej n zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+1)$. Czy stąd wynika, że

- | | |
|--------------------------|---------------------------|
| a) $T(5)$ jest fałszywe | b) $T(10)$ jest prawdziwe |
| c) $T(15)$ jest fałszywe | d) $T(20)$ jest prawdziwe |

¹Zamiast słowa *zdanie* poprawniej jest użyć w tym kontekście określenia *formuła zdaniowa*, ale może to być nieco odstraszaające.

36. O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że prawdziwe jest $T(25)$, a ponadto dla każdej liczby naturalnej $n \geq 20$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+2)$ oraz dla każdej liczby naturalnej $4 \leq n \leq 30$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n-3)$. Czy stąd wynika, że prawdziwe jest

- a) $T(37)$ b) $T(38)$ c) $T(10)$ d) $T(11)$

37. Niech $T(n)$ oznacza zdanie: Suma cyfr liczby n jest większa od 10. Czy prawdziwa jest implikacja

- a) $T(27) \Rightarrow T(39)$ b) $T(99) \Rightarrow T(100)$ c) $T(63) \Rightarrow T(71)$ d) $T(29) \Rightarrow T(57)$

38. O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że prawdziwe jest $T(1)$, a ponadto dla każdej liczby naturalnej n zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+4)$. Czy stąd wynika, że

- a) $T(2008)$ jest prawdziwe
 b) $T(2009)$ jest prawdziwe
 c) $T(2013)$ jest fałszywe
 d) $T(2014)$ jest fałszywe

39. O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że prawdziwe jest $T(1)$, a ponadto dla każdej liczby naturalnej n zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+4)$. Czy stąd wynika, że prawdziwa jest implikacja

- a) $T(80) \Rightarrow T(92)$
 b) $T(81) \Rightarrow T(93)$
 c) $T(96) \Rightarrow T(76)$
 d) $T(97) \Rightarrow T(77)$

40. Przedstawić liczbę $0,123(45)$ w postaci ułamka zwykłego.

41. Przedstawić liczbę $0,1(270)$ w postaci ułamka zwykłego.

Obliczyć podając wynik w postaci ułamka zwykłego

42. $\sqrt{0,(4)} + \sqrt[3]{3,374(9)}$

43. $(0,2(9) + 1,(09)) \cdot 12,(2)$

44. $(0,(037))^{0,(3)}$

45. Zapisać ułamek zwykły w postaci ułamka dziesiętnego skończonego lub okresowego

a) $\frac{1}{6} = \dots\dots\dots$

b) $\frac{1}{8} = \dots\dots\dots$

c) $\frac{1}{9} = \dots\dots\dots$

d) $\frac{1}{11} = \dots\dots\dots$

Liczby rzeczywiste, liczby wymierne i niewymierne.**Wykład: zad. 46-50**

46. Dowieść, że nie istnieje liczba wymierna dodatnia, której kwadrat jest równy 2.

47. Czy liczba $0,(9) = 0,999999\dots$ jest wymierna czy niewymierna?

48. Niech

$$x = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + \dots$$

Wówczas

$$\begin{aligned} x &= 1 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 9 + 3 \cdot 27 + 3 \cdot 81 + 3 \cdot 243 + \dots = \\ &= 1 + 3 \cdot (1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + \dots) = 1 + 3x, \end{aligned}$$

skąd $x = -1/2$.

Jak to możliwe, że suma liczb całkowitych dodatnich jest ujemna i niecałkowita?

49. Dowieść, że liczba $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ jest niewymierna.

Przykład 50. Dowieść, że liczba $\log_2 3$ jest niewymierna.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\log_2 3$ jest wymierna i niech m/n będzie jej przedstawieniem w postaci ilorazu liczb naturalnych (zauważmy, że jest to liczba dodatnia). Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\log_2 3 = \frac{m}{n}$$

$$2^{m/n} = 3$$

$$2^m = 3^n.$$

Ta ostatnia równość nie jest jednak możliwa, gdyż liczba 2^m jest parzysta, a liczba 3^n nieparzysta. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $\log_2 3$ nie jest liczbą wymierną.

Ćwiczenia 13.10.2014: zad. 51-65

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami. Na ćwiczeniach wyjaśnimy sobie trudności związane z tymi zadaniami.

51. Dowieść, że liczba $\sqrt{15}$ jest niewymierna.

52. Dowieść, że liczba $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$ jest niewymierna.

53. Dowieść, że liczba $\sqrt{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$ jest niewymierna.

54. Niech n będzie liczbą naturalną. Mając do dyspozycji nawiasy, n , liczby całkowite oraz znaki $+$, $-$, $,$, $:$ i $\sqrt{\quad}$ zapisać liczbę niewymierną dodatnią mniejszą od $\frac{1}{n}$.

OSZUSTWO 55.

ZADANIE: Dowieść, że liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$ jest niewymierna.

Rozwiązanie I:

Liczba $-\sqrt{2}$ jest niewymierna. Także liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}$ jest niewymierna, bo gdyby była wymierna, to jej kwadrat $3-\sqrt{8}$ też byłby liczbą wymierną, a nie jest. Zatem liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$ jest niewymierna jako suma liczb niewymiernych.

Rozwiązanie II:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$ jest wymierna i oznaczmy ją przez w . Wtedy

$$\begin{aligned}w &= \sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2} \\w + \sqrt{2} &= \sqrt{3-\sqrt{8}} \\w^2 + 2\sqrt{2}w + 2 &= 3 - 2\sqrt{2} \\2\sqrt{2}(w+1) + (w-1)(w+1) &= 0\end{aligned}$$

Dzieląc ostatnią równość przez $w+1$ otrzymujemy

$$2\sqrt{2} + w - 1 = 0,$$

co stanowi sprzeczność z założeniem wymierności liczby w , gdyż lewa strona równości jest liczbą niewymierną i nie może być równa 0.

Czy powyższe rozwiązania są poprawne?

56. Liczby a i b są dodatnie i niewymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczba $a+b$ jest niewymierna?

57. Liczby $a+b$, $b+c$ i $c+a$ są wymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczby a , b , c są wymierne?

58. Liczby $a+b$, $b+c$ i $c+a$ są niewymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczba $a+b+c$ jest niewymierna?

59. Liczby $a+b$, $b+c$, $c+d$ i $d+a$ są wymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczby a , b , c , d są wymierne?

60. Dowieść, że liczba $\log_{12}18$ jest niewymierna.

61. Dowieść, że liczba $\log_{20}50$ jest niewymierna.

62. Dowieść, że liczba $\sqrt{\log_4 25}$ jest niewymierna.

63. Rozstrzygnąć, czy liczba $\log_2 3 + \log_4 5$ jest wymierna, czy niewymierna.

64. Dowieść, że nie istnieje liczba wymierna q spełniająca równość

$$q^q = 5.$$

65. Chcemy zlokalizować położenie względem liczb wymiernych, liczby rzeczywistej $q > 1$ spełniającej równanie z poprzedniego zadania. Dla dowolnej liczby wymiernej postaci m/n , gdzie m jest liczbą całkowitą, a n liczbą naturalną, zapisać warunki $m/n < q$ oraz $m/n > q$ używając tylko liczb m , n , działań na liczbach całkowitych, znaków nierówności i ewentualnie symboli logicznych.

Wykorzystać te warunki do porównania liczby q z liczbami $5/2$ oraz $25/12$ (bez użycia kalkulatora, korzystając z nierówności typu: $25 < 27$, $125 < 128$).

Konwersatorium 14.10.2014: zad. 66-72

Zadania należy spróbować rozwiązać przed konwersatorium. Mamy 2 godziny konwersatorium w sali WS lub 601 (sala zostanie podana na wykładzie tuż przed konwersatorium).

66. Przy każdym z poniższych zdań w miejscu kropek postaw jedną z liter **P**, **F**, **N**:

P - jest **P**rawdą (tzn. musi być prawdziwe)

F - jest **F**ałszem (tzn. musi być fałszywe)

N - może być prawdziwe lub fałszywe (tzn. **N**ie wiadomo, czasem bywa prawdziwe, a czasem fałszywe)

O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że $T(1)$ jest prawdziwe, $T(100)$ jest fałszywe, a ponadto dla każdej liczby naturalnej n zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+10)$. Wówczas:

a) $T(70)$ b) $T(81)$

c) $T(92)$ d) $T(101)$

e) $T(140)$ f) $T(75) \Rightarrow T(105)$

g) $T(161) \Rightarrow T(160)$ h) $T(51) \Rightarrow T(60)$

i) $T(10) \Rightarrow T(11)$ j) $T(10) \Rightarrow T(12)$

67. O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że prawdziwe jest $T(1)$, a ponadto dla każdej liczby naturalnej n implikacja $T(2n-1) \Rightarrow T(2n)$ **jest fałszywa**. Czy stąd wynika, że

a) $T(5)$ jest prawdziwe

b) $T(6)$ jest prawdziwe

c) $T(7)$ jest fałszywe

d) $T(8)$ jest fałszywe

68. O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że prawdziwe jest $T(1)$, a ponadto dla każdej liczby naturalnej n implikacja $T(3n-1) \Rightarrow T(3n)$ **jest fałszywa**. Czy stąd wynika, że

a) $T(7)$ jest prawdziwe

b) $T(8)$ jest prawdziwe

c) $T(9)$ jest fałszywe

d) $T(10)$ jest fałszywe

69. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$9 \cdot (3n)! \cdot n \dots\dots\dots 2 \cdot (3^n \cdot n!)^3.$$

W miejsce kropek wstawić jeden ze znaków: $>$, $<$, $=$, $\geq$, $\leq$.

70. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 200$ sześciąt można podzielić na n sześciątów.

71. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$16^n \cdot \binom{4n}{2n} < 27^n \cdot \binom{4n}{n}.$$

72. Dla liczby wymiernej dodatniej $q = m/n$, gdzie $m, n \in \mathbb{N}$, zapisać warunek $\log_2 3 < q$. Wykorzystać ten warunek do porównania $\log_2 3$ z liczbami $3/2$, $5/3$ oraz $8/5$.