

Sprawdzian nr 2: 27.10.2014 (pn.), godz. 10:15-10:35 (materiał zad. 1-136, 138-150)
Kolokwium nr 1: 3.11.2014 (poniedziałek), godz. 10:15-11:00 (materiał zad. 1-210)

Ćwiczenia 24.10.2014 (piątek): zad. 138-150

Osoby, które uzyskują z kartkówki z analizy poniżej 50% punktów, powinny przyjść na ćwiczenia. Pozostali mogą ograniczyć się do rozwiązywania tych zadań we własnym zakresie.

138. Która z liczb jest większa $\left(\frac{9}{4}\right)^{9/4}$ czy 6 ?

W rozwiązaniu wolno korzystać z własności potęgowania, wolno wykonywać obliczenia na liczbach naturalnych mniejszych od 100 oraz wolno wykorzystać równości $2^{11} = 2048$ i $3^7 = 2187$.

139. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \frac{1}{99} + \dots + \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{n}{2n + 1}.$$

140. Niech

$G(1) = 1$, $G(2) = 6$, $G(3) = 5$, oraz $G(n+3) = 3 \cdot G(n+1) + 2 \cdot G(n)$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$

Dowieść, że wówczas dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$G(n) = 2^n + n \cdot (-1)^n.$$

141. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$8n \leq 2^n + 16.$$

142. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele par liczb naturalnych $k < n$ spełniających równanie

$$k \cdot \binom{n}{k} = \binom{n}{k+1}.$$

143. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 < \frac{n^2 \cdot (n+1)^2 \cdot (2n+1)}{10}.$$

144. W każdym z zadań **144.1.-144.6.** udziel czterech **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**.

144.1. O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwe są implikacje $T(n) \Rightarrow T(n+3)$ oraz $T(n) \Rightarrow T(n+4)$. Czy stąd wynika, że prawdziwa jest implikacja

a) $T(100) \Rightarrow T(102)$

b) $T(200) \Rightarrow T(205)$

c) $T(300) \Rightarrow T(307)$

d) $T(400) \Rightarrow T(410)$

144.2. O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że prawdziwe jest $T(1)$, a ponadto dla każdej liczby naturalnej n prawdziwe są implikacje $T(n) \Rightarrow T(n+3)$ oraz $T(n) \Rightarrow T(n+100)$. Czy stąd wynika, że prawdziwe jest

- a) $T(50)$ b) $T(100)$
c) $T(150)$ d) $T(240)$

144.3. Czy podana liczba jest wymierna

- a) $\sqrt{(2-\sqrt{2})^2} + \sqrt{2}$ b) $\sqrt{(3-\sqrt{11})^2} + \sqrt{11}$
c) $\sqrt{(4-\sqrt{13})^2} + \sqrt{13}$ d) $\sqrt{(5-\sqrt{29})^2} + \sqrt{29}$

144.4. Czy dla dowolnej liczby naturalnej $n > 10$ prawdziwa jest równość

- a) $\binom{n}{1} = n$ b) $\binom{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$
c) $\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3}$
d) $\binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$

144.5. Czy równość $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = 2 \cdot \binom{n+1}{k}$ jest prawdziwa dla

- a) $n=10, k=3$ b) $n=20, k=7$
c) $n=30, k=10$ d) $n=40, k=13$

144.6. Czy równość $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = 3 \cdot \binom{n+1}{k}$ jest prawdziwa dla

- a) $n=40, k=10$ b) $n=81, k=20$
c) $n=122, k=30$ d) $n=163, k=40$

145. Przy każdej z dziewięciu poniższych implikacji w miejscu kropek postaw jedną z liter **P**, **F**, **N**:

P - jest **Prawdą** (tzn. implikacja musi być prawdziwa)

F - jest **Fałszem** (tzn. implikacja musi być fałszywa)

N - implikacja może być prawdziwa lub fałszywa (tzn. Nie wiadomo, czasem bywa prawdziwa, a czasem fałszywa)

O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że dla każdej liczby naturalnej n implikacja $T(2^n) \Rightarrow T(3^n)$ jest **fałszywa**. Co stąd wynika o implikacji:

- a) $T(3) \Rightarrow T(4)$ b) $T(4) \Rightarrow T(5)$
c) $T(7) \Rightarrow T(8)$ d) $T(8) \Rightarrow T(9)$
e) $T(8) \Rightarrow T(16)$ f) $T(9) \Rightarrow T(10)$
g) $T(9) \Rightarrow T(27)$ h) $T(12) \Rightarrow T(18)$
i) $T(25) \Rightarrow T(27)$

146. Dowieść, że liczba $\log_{60} 360$ jest niewymierna.

147. Dobrać odpowiednie liczby wymierne dodatnie C oraz D i udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{6n^{11} - 3n^6 + 2}{6n^{11} - 3n^5 + 3} \leq D.$$

Liczby C i D muszą spełniać nierówność $D \leq 8C$.

W wersji trudniejszej liczby C i D spełniają nierówność $D \leq 4C$.

W wersji najtrudniejszej liczby C i D spełniają nierówność $D \leq 2C$.

148. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$(2n+7) \cdot \binom{2n}{n} > 4^{n+1}.$$

149. Dobrać odpowiednie liczby wymierne dodatnie g oraz C i udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$g - \frac{C}{n} < \sqrt[4]{n^4 + n^3} - n < g + \frac{C}{n}.$$

150. W każdym z czterech poniższych zadań wpisz w miejscu kropek dwie liczby występujące w ciągu $0, 1, 2, 5, 10, 100, 10^5, 10^{10}, 10^{20}, 10^{50}, 10^{100}, 10^{200}, 10^{500}, 10^{1000}, 10^{2000}, 10^{5000}, 10^{10000}, 10^{20000}, 10^{50000}, 10^{100000}, 10^{200000}, 10^{500000}, 10^{1000000}$ na **kolejnych** miejscach tak, aby powstały prawdziwe nierówności.

$$\begin{array}{ll} \mathbf{150.1} & \dots < 222^{5555} < \dots \\ \mathbf{150.2} & \dots < 5555^{222} < \dots \\ \mathbf{150.3} & \dots < (10^5)! < \dots \\ \mathbf{150.4} & \dots < \binom{10^5}{100} < \dots \end{array}$$

Wykład: zad. 151-155

Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$\mathbf{151.} \quad 2 - \frac{3}{n} < \frac{2n+5}{n+1} < 2 + \frac{3}{n}.$$

$$\mathbf{152.} \quad \frac{1}{2} - \frac{1/8}{n} < \sqrt{n^2 + n} - n < \frac{1}{2} + \frac{1/8}{n}.$$

$$\mathbf{153.} \quad \frac{1}{3} - \frac{1/8}{n} < \sqrt[3]{n^3 + n^2} - n < \frac{1}{3} + \frac{1/8}{n}.$$

$$\mathbf{154.} \quad 1 - \frac{2}{\sqrt{n}} < \sqrt[n]{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

$$\mathbf{155.} \quad 1 - \frac{3}{n^{2/3}} < \sqrt[n]{n} < 1 + \frac{3}{n^{2/3}}.$$

Ciągi.

Trochę teorii

Uwaga: Umieszczanie zmiennej pod kwantyfikatorem nie jest zgodne z obowiązującymi konwencjami, ale jest bardziej czytelne niż umieszczenie obok - dlatego pozwalam sobie na odstępstwo od panujących reguł.

DEFINICJA: Ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy g wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N |a_n - g| < \varepsilon .$$

Piszemy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$.

Ciąg (a_n) jest **rozbieżny** do $+\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall M \exists N \forall n \geq N a_n > M.$$

Piszemy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.

Ciąg (a_n) jest **rozbieżny** do $-\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall M \exists N \forall n \geq N a_n < M.$$

Piszemy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

TWIERDZENIA:

1. CIĄG ZBIEŻNY MA TYLKO JEDNĄ GRANICĘ.

2. GRANICA SUMY JEST SUMĄ GRANIC.

Dokładniej, jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, to ciąg $(a_n + b_n)$ jest zbieżny i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n .$$

3. GRANICA RÓŻNICY JEST RÓŻNICĄ GRANIC.

Dokładniej, jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, to ciąg $(a_n - b_n)$ jest zbieżny i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n .$$

4. GRANICA ILOCZYNU JEST ILOCZYNEM GRANIC.

Dokładniej, jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, to ciąg $(a_n b_n)$ jest zbieżny i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n .$$

5. GRANICA ILORAZU JEST ILORAZEM GRANIC.

Dokładniej, jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, przy czym $b_n \neq 0$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$, to ciąg $(\frac{a_n}{b_n})$ jest zbieżny i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} .$$

6. ZBIEŻNOŚĆ I GRANICA NIE ZALEŻĄ OD POMINIĘCIA LUB ZMIANY SKOŃCZENIE WIELU POZOSTAŁYCH WYRAZÓW CIĄGU.

7. SŁABE NIERÓWNOŚCI ZACHOWUJĄ SIĘ PRZY PRZEJŚCIU DO GRANICY.

Dokładniej, jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, przy czym $a_n \leq b_n$ (odpowiednio $a_n \geq b_n$), to $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ (odpowiednio $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$).

8. KILKA PODSTAWOWYCH GRANIC.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a = a$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = +\infty \text{ dla } a > 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0 \text{ dla } |a| < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \text{ nie istnieje nawet w sensie granicy niewłaściwej}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \text{ dla } a > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

9. Z GRANICĄ MOŻNA WCHODZIĆ POD PIERWIASTEK.

Dokładniej, jeśli ciąg (a_n) jest zbieżny, przy czym $a_n \geq 0$, to dla $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}.$$

10. TWIERDZENIE O TRZECH CIĄGACH.

Jeżeli ciągi (a_n) , (b_n) , (c_n) spełniają warunek

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

oraz ciągi (a_n) i (c_n) są zbieżne do tej samej granicy g , to ciąg (b_n) też jest zbieżny i jego granicą jest g .

11. KRYTERIUM D'ALEMBERTA.

Jeżeli (a_n) jest ciągiem o wyrazach niezerowych oraz istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g < 1,$$

to ciąg (a_n) jest zbieżny do zera.

Jeżeli istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g > 1,$$

to ciąg (a_n) jest rozbieżny, a ciąg $(|a_n|)$ jest rozbieżny do $+\infty$.

Uwaga: Podstawowym zastosowaniem kryterium d'Alemberta jest badanie zbieżności szeregów, ale podana wyżej wersja stosuje się do badania zbieżności ciągów. O szeregach będzie mowa za kilka tygodni.

Powyższe własności zachowują się w przypadku ciągów mających granice niewłaściwe (tzn. rozbieżnych do $\pm\infty$), o ile nie prowadzi to do wyrażeń nieoznaczonych.

12. SZTUCZKI OPARTE NA WZORACH SKRÓCONEGO MNOŻENIA.

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

$$\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = \frac{x - y}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}$$

Ćwiczenia 27.10.2014 (poniedziałek): zad. 156-174

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami. Na ćwiczeniach wyjaśnimy sobie trudności związane z tymi zadaniami.

PRAWDA CZY FAŁSZ?

- 156.** Jeżeli ciągi (a_n) i (b_n) są rozbieżne, to ciąg $(a_n + b_n)$ jest rozbieżny.
- 157.** Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny, a ciąg (b_n) rozbieżny, to ciąg $(a_n + b_n)$ jest rozbieżny.
- 158.** Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny, a ciąg (b_n) rozbieżny, to ciąg $(a_n b_n)$ jest rozbieżny.
- 159.** Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny, ciąg (b_n) rozbieżny, a ponadto obydwa ciągi mają tylko wyrazy dodatnie, to ciąg $(a_n b_n)$ jest rozbieżny.
- 160.** Jeżeli (a_n) jest ciągiem zbieżnym o wyrazach dodatnich, to jego granica jest liczbą dodatnią.
- 161.** Jeżeli $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow \frac{1}{2}$, to $a_n \rightarrow \frac{1}{2}$.
- 162.** Jeżeli ciąg $(\frac{a_{n+1}}{a_n})$ jest zbieżny, to ciąg (a_n) jest zbieżny.
- 163.** Jeżeli ciąg (a_n^2) jest zbieżny, to ciąg (a_n) jest zbieżny.
- 164.** Jeżeli wśród wyrazów ciągu (a_n) występują zarówno wyrazy dodatnie jak i ujemne, to ciąg (a_n) jest rozbieżny.
- 165.** Jeżeli wśród wyrazów ciągu (a_n) występują zarówno wyrazy mniejsze od 1 jak i większe od 3, to ciąg (a_n) jest rozbieżny.

Zbadać zbieżność ciągu (a_n) określonego podanym wzorem; obliczyć granice ciągów zbieżnych, rozstrzygnąć czy ciągi rozbieżne mają granicę niewłaściwą

$$166. \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2} \quad 167. \frac{3^0+3^1+3^2+3^3+\dots+3^n}{3^n} \quad 168. \frac{\sqrt{3^n+2^n}}{\sqrt{3^n+1}}$$

$$169. \sqrt{n^2+3n}-n \quad 170. n(\sqrt{n^2+7}-n) \quad 171. \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+7}-\sqrt{n}}$$

$$172. \frac{\sqrt{n^4+1}-n^2}{(\sqrt{n^4+n}-n^2)^2} \quad 173. \frac{7n+(\sqrt[3]{n}\sqrt[6]{n})^5\sqrt{9n+1}}{11n^3+7n+3}$$

174. Ciąg (a_n) spełnia warunek

$$\forall_{n>1000} |a_n - 100| < 10.$$

Czy stąd wynika, że

- a) ciąg (a_n) jest zbieżny,
- b) ciąg (a_n) jest rozbieżny,
- c) każdy wyraz ciągu (a_n) jest dodatni,
- d) ciąg (a_n) ma co najmniej jeden wyraz dodatni,
- e) od pewnego miejsca wszystkie wyrazy ciągu są dodatnie,
- f) $a_{666} < 7777777$,
- g) $a_{1111} > 88$,
- h) $\forall_{n>1729} |a_n - 100| < 1$,
- i) $\forall_{n>345} |a_n - 100| < 17$,
- j) $\forall_{n>5555} |a_n - 99| < 13$,
- k) ciąg (a_n) jest ograniczony,
- l) $\exists_{n>444} |a_n - 95| < 37$,
- m) $\exists_{n>4444} |a_n - 80| < 37$,
- n) $\exists_{n<444} |a_n - 95| < 37$,
- o) $\exists_{n<4444} |a_n - 80| < 37$,
- p) $\forall_m \exists_{n>m} a_n > 0$,
- q) $\forall_{n>1331} |a_n - 66| > 12$,
- r) $\forall_{m>1234} \forall_{n>5678} |a_n - a_m| < 7$,
- s) $\forall_{m>1234} \forall_{n>5678} |a_n - a_m| < 17$,
- t) $\forall_{m>123} \forall_{n>45678} |a_n - a_m| < 27$,
- u) $\forall_{m>1234} \forall_{n>5678} |a_n - a_m| < 37$,
- v) $\exists_{m<123} \exists_{n<456} |a_n - a_m| < 3$,
- w) $\forall_{m>12345} \forall_{n>67890} |a_n + a_m| < 210$,
- x) $\forall_{m>1296} \forall_{n>7776} |a_n + a_m| < 222$,
- y) $\forall_{m>1024} \forall_{n>8192} |a_n + a_m| > 128$,
- z) $\exists_n a_n < 92$,
- ż) $\exists_n a_n > 91$.

Konwersatorium 28.10.2014 (wtorek): zad. 175-177

Zadania należy spróbować rozwiązać przed konwersatorium (2 godziny w sali 601). Zaczniemy od zadania 137. W dniu 4.11.2014 nie będzie konwestarorium.

175. Dany jest taki ciąg (a_n) , że

$$\forall_{\varepsilon>0} \quad \forall_{n \geq 5/\varepsilon} |a_n - 7| < \varepsilon.$$

Podać granicę ciągu (a_n) .

Wskazać taką liczbę M , że $\forall_n |a_n| < M$.

Wskazać taką liczbę N , że $\forall_{n \geq N} a_n > 6$.

Wskazać taką liczbę N , że $\forall_{n \geq N} a_n < 7,01$.

Wskazać taką liczbę N , że $\forall_{n \geq N} |a_n - 8| > 1/3$.

176. Dany jest taki ciąg (b_n) , że

$$\forall_{\varepsilon > 0} \quad \forall_{n \geq 10/\varepsilon} |b_n + 2| < \varepsilon.$$

Podać granicę ciągu (b_n) .

Wskazać taką liczbę M , że $\forall_n |b_n| < M$.

Wskazać taką liczbę N , że $\forall_{n \geq N} b_n < 0$.

Wskazać taką liczbę N , że $\forall_{n \geq N} b_n > -3$.

Wskazać taką liczbę N , że $\forall_{n \geq N} |b_n - 2| > 1/10$.

177. Niech $c_n = a_n + b_n$, gdzie (a_n) i (b_n) są ciągami z poprzednich dwóch zadań. Dowieść, że wówczas ciąg (c_n) jest zbieżny, gdyż

$$\forall_{\varepsilon > 0} \quad \forall_{n \geq \dots\dots\dots/\varepsilon} |c_n - 5| < \varepsilon.$$

W miejscu kropek powinna się znaleźć odpowiednio dobrana liczba.

Ćwiczenia 30.10.2014 (czwartek z zajęciami piątkowymi): zad. 178-210

Osoby, które uzyskują z kartkówki z analizy poniżej 50% punktów, powinny przyjść na ćwiczenia. Pozostali mogą ograniczyć się do rozwiązania tych zadań we własnym zakresie.

Wyjaśnić, dlaczego poniżej są same **BZDURY**:

178. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = 0 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = 0$

179. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty - \infty = 0$

180. $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = \begin{cases} -1 & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ 1 & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$

181. $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{n} = k \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = k \cdot 0 = 0$

Zbadać zbieżność ciągu (a_n) określonego podanym wzorem; obliczyć granice ciągów zbieżnych, rozstrzygnąć czy ciągi rozbieżne mają granicę niewłaściwą

182. $\frac{n}{n+7}$ **183.** $2^n - \frac{1}{n}$ **184.** $\frac{4n^2+3n}{n+1}$ **185.** $\frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+2}$ **186.** $\frac{5n^3+n^2-6}{3n^4+7}$

$$\begin{array}{lll}
 187. \frac{5n^4 + n^2 - 6}{3n^4 + 7} & 188. \frac{5n^5 + n^2 - 6}{3n^4 + 7} & 189. \frac{1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots - 2n}{\sqrt{n^2 + 2}} \\
 190. \frac{1 + 2 + 4 + \dots + 2^n}{1 + 3 + 9 + \dots + 3^n} & 191. \frac{n}{1 + \sqrt{n}} & 192. n \cdot (-1)^n \quad 193. \frac{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})^7}{n^3(1 + 7\sqrt{n+2})}
 \end{array}$$

194. Wskazać liczbę naturalną k , dla której granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2 \cdot \sqrt[6]{n^k + 1}}{n^2 + 5 \cdot \sqrt[3]{n^7 + 7} + 7 \cdot \sqrt{n^5 + 5}}$$

istnieje i jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Obliczyć wartość granicy przy tak wybranej liczbie k .

195. Wskazać liczbę naturalną k , dla której granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^{14} + 9n^9 + 1} - n^7}{n^k}$$

istnieje i jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Obliczyć wartość granicy przy tak wybranej liczbie k .

196. Ciąg (a_n) spełnia warunek

$$\forall_{\varepsilon \geq 1} \exists_N \forall_{n \geq N} |a_n - 1| \leq \varepsilon.$$

Czy stąd wynika, że

- 196.1 ciąg (a_n) jest zbieżny
- 196.2 ciąg (a_n) jest rozbieżny
- 196.3 ciąg (a_n) jest ograniczony
- 196.4 wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie
- 196.5 wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są nieujemne
- 196.6 od pewnego miejsca wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie
- 196.7 od pewnego miejsca wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są nieujemne
- 196.8 w ciągu (a_n) występuje nieskończenie wiele wyrazów dodatnich
- 196.9 w ciągu (a_n) występuje nieskończenie wiele wyrazów nieujemnych
- 196.10 w ciągu (a_n) występuje co najmniej jeden wyraz dodatni
- 196.11 w ciągu (a_n) występuje co najmniej jeden wyraz nieujemny
- 196.12 $\forall_n a_n > 0$
- 196.13 $\forall_n a_n \geq 0$
- 196.14 $\exists_N \forall_{n \geq N} a_n > 0$
- 196.15 $\exists_N \forall_{n \geq N} a_n \geq 0$
- 196.16 $\forall_N \exists_{n \geq N} a_n > 0$
- 196.17 $\forall_N \exists_{n \geq N} a_n \geq 0$
- 196.18 $\exists_n a_n > 0$
- 196.19 $\exists_n a_n \geq 0$

Podaj wartość granicy (liczba rzeczywista) lub granicy niewłaściwej ($+\infty$ lub $-\infty$). Wpisz literkę **R**, jeśli granica nie istnieje (tzn. gdy ciąg występujący pod znakiem granicy jest rozbieżny, ale nie jest to rozbieżność do $+\infty$ ani do $-\infty$).

197. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3}{5n^2 + 7} = \dots\dots\dots$

198. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3}{5^n + 7} = \dots\dots\dots$

199. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2 + 9}}{25n^2 + 49} = \dots\dots\dots$

200. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4 \cdot 9^n + 25}}{25 \cdot 3^n + 49} = \dots\dots\dots$

201. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + 7n}{2 + 5n} = \dots\dots\dots$

202. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4 + 7n}{2 + 5n} + \frac{1}{n} \right) = \dots\dots\dots$

203. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4 + 7n}{2 + 5n} + \frac{n^2 + 1}{n} \right) = \dots\dots\dots$

204. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4 + 7n}{2 + 5n} + (-1)^n \right) = \dots\dots\dots$

205. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n} \right) = \dots\dots\dots$

206. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2n + \sqrt{n}} - \sqrt{2n} \right) = \dots\dots\dots$

207. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{4n + \sqrt{n}} - 2\sqrt{n} \right) = \dots\dots\dots$

208. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^3 + n\sqrt{n}} - n\sqrt{n} \right) = \dots\dots\dots$

209. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2n^3 + n\sqrt{n}} - n\sqrt{2n} \right) = \dots\dots\dots$

210. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{4n^3 + n\sqrt{n}} - 2n\sqrt{n} \right) = \dots\dots\dots$