

142. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele par liczb naturalnych $k < n$ spełniających równanie

$$k \cdot \binom{n}{k} = \binom{n}{k+1}.$$

Rozwiązanie:

Stosując wzór na wartość współczynnika dwumianowego otrzymujemy

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \quad \text{oraz} \quad \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{(k+1)! \cdot (n-k-1)!},$$

co po wstawieniu do równania danego w zadaniu prowadzi do

$$k \cdot \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{(k+1)! \cdot (n-k-1)!}.$$

To z kolei daje kolejno równoważne postaci tego równania:

$$\frac{k}{k! \cdot (n-k-1)! \cdot (n-k)} = \frac{1}{k! \cdot (k+1) \cdot (n-k-1)!},$$

$$\frac{k}{(n-k)} = \frac{1}{(k+1)},$$

$$k \cdot (k+1) = n-k,$$

$$k \cdot (k+1) + k = n,$$

$$k^2 + 2k = n. \quad (\spadesuit)$$

Zatem równanie dane w treści zadania jest równoważne równaniu $(\spadesuit)$. Stąd wynika, że rozwiązaniem tego równania jest każda para (k, n) , gdzie k jest dowolną liczbą naturalną oraz $n = k^2 + 2k$.

143. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 < \frac{n^2 \cdot (n+1)^2 \cdot (2n+1)}{10}.$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n = 1$ lewa strona dowodzonej nierówności ma wartość 1, a prawa $12/10 = 6/5$. Zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $1 < 6/5$, jest więc prawdziwa.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 < \frac{n^2 \cdot (n+1)^2 \cdot (2n+1)}{10}.$$

Wykażemy, że wówczas

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 + (n+1)^4 < \frac{(n+1)^2 \cdot (n+2)^2 \cdot (2n+3)}{10}. \quad (\clubsuit)$$

Wychodząc od lewej strony nierówności $(\clubsuit)$ i korzystając z założenia indukcyjnego otrzymujemy

$$L = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 + (n+1)^4 < \frac{n^2 \cdot (n+1)^2 \cdot (2n+1)}{10} + (n+1)^4 =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(n+1)^2}{10} \cdot (n^2 \cdot (2n+1) + 10 \cdot (n+1)^2) = \frac{(n+1)^2}{10} \cdot (2n^3 + n^2 + 10n^2 + 20n + 10) = \\
&= \frac{(n+1)^2}{10} \cdot (2n^3 + 11n^2 + 20n + 10).
\end{aligned}$$

Z kolei prawą stronę nierówności ($\clubsuit$) możemy zapisać jako

$$\begin{aligned}
P &= \frac{(n+1)^2 \cdot (n+2)^2 \cdot (2n+3)}{10} = \frac{(n+1)^2}{10} \cdot (n+2)^2 \cdot (2n+3) = \\
&= \frac{(n+1)^2}{10} \cdot (n^2 + 4n + 4) \cdot (2n+3) = \frac{(n+1)^2}{10} \cdot (2n^3 + 8n^2 + 8n + 3n^2 + 12n + 12) = \\
&= \frac{(n+1)^2}{10} \cdot (2n^3 + 11n^2 + 20n + 12).
\end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy

$$L < \frac{(n+1)^2}{10} \cdot (2n^3 + 11n^2 + 20n + 10) < \frac{(n+1)^2}{10} \cdot (2n^3 + 11n^2 + 20n + 12) = P,$$

co kończy dowód drugiego kroku indukcyjnego.

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej n .

144. W każdym z zadań **144.1.-144.6.** udziel czterech **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**.

144.1. O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwe są implikacje $T(n) \Rightarrow T(n+3)$ oraz $T(n) \Rightarrow T(n+4)$. Czy stąd wynika, że prawdziwa jest implikacja

- | | |
|---|---|
| a) $T(100) \Rightarrow T(102)$ NIE | b) $T(200) \Rightarrow T(205)$ NIE |
| c) $T(300) \Rightarrow T(307)$ TAK | d) $T(400) \Rightarrow T(410)$ TAK |

144.2. O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że prawdziwe jest $T(1)$, a ponadto dla każdej liczby naturalnej n prawdziwe są implikacje $T(n) \Rightarrow T(n+3)$ oraz $T(n) \Rightarrow T(n+100)$. Czy stąd wynika, że prawdziwe jest

- | | |
|------------------------|------------------------|
| a) $T(50)$ NIE | b) $T(100)$ TAK |
| c) $T(150)$ NIE | d) $T(240)$ TAK |

144.3. Czy podana liczba jest wymierna

- | | |
|--|--|
| a) $\sqrt{(2-\sqrt{2})^2} + \sqrt{2}$ TAK | b) $\sqrt{(3-\sqrt{11})^2} + \sqrt{11}$ NIE |
| c) $\sqrt{(4-\sqrt{13})^2} + \sqrt{13}$ TAK | d) $\sqrt{(5-\sqrt{29})^2} + \sqrt{29}$ NIE |

144.4. Czy dla dowolnej liczby naturalnej $n > 10$ prawdziwa jest równość

- | | |
|--|---|
| a) $\binom{n}{1} = n$ TAK | b) $\binom{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ NIE |
| c) $\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3}$ NIE | |
| d) $\binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$ TAK | |

144.5. Czy równość $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = 2 \cdot \binom{n+1}{k}$ jest prawdziwa dla

a) $n = 10, k = 3$ **TAK**

b) $n = 20, k = 7$ **NIE**

c) $n = 30, k = 10$ **NIE**

d) $n = 40, k = 13$ **TAK**

144.6. Czy równość $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = 3 \cdot \binom{n+1}{k}$ jest prawdziwa dla

a) $n = 40, k = 10$ **NIE**

b) $n = 81, k = 20$ **NIE**

c) $n = 122, k = 30$ **TAK**

d) $n = 163, k = 40$ **NIE**

145. Przy każdej z dziewięciu poniższych implikacji w miejscu kropek postaw jedną z liter **P**, **F**, **N**:

P - jest **Prawdą** (tzn. implikacja musi być prawdziwa)

F - jest **Fałszem** (tzn. implikacja musi być fałszywa)

N - implikacja może być prawdziwa lub fałszywa (tzn. Nie wiadomo, czasem bywa prawdziwa, a czasem fałszywa)

O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że dla każdej liczby naturalnej n implikacja $T(2^n) \Rightarrow T(3^n)$ jest **fałszywa**. Co stąd wynika o implikacji:

a) $T(3) \Rightarrow T(4)$ **P**

b) $T(4) \Rightarrow T(5)$ **N**

c) $T(7) \Rightarrow T(8)$ **P**

d) $T(8) \Rightarrow T(9)$ **F**

e) $T(8) \Rightarrow T(16)$ **P**

f) $T(9) \Rightarrow T(10)$ **P**

g) $T(9) \Rightarrow T(27)$ **P**

h) $T(12) \Rightarrow T(18)$ **N**

i) $T(25) \Rightarrow T(27)$ **N**

146. Dowieść, że liczba $\log_{60} 360$ jest niewymierna.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\log_{60} 360$ jest wymierna i niech m/n będzie jej przedstawieniem w postaci ilorazu liczb naturalnych (zauważmy, że jest to liczba dodatnia). Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\log_{60} 360 = \frac{m}{n}$$

$$60^{m/n} = 360$$

$$60^m = 360^n.$$

Rzozkładając obie strony powyższej równości na iloczyny potęg liczb pierwszych otrzymujemy

$$2^{2m} \cdot 3^m \cdot 5^m = 2^{3n} \cdot 3^{2n} \cdot 5^n.$$

Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze wynika, że wykładniki przy odpowiednich potęgach liczb pierwszych po obu stronach równości są równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} 2m &= 3n \\ m &= 2n \\ m &= n \end{cases}$$

Jednak powyższy układ równań nie ma rozwiązań w liczbach dodatnich m, n , gdyż wówczas mielibyśmy

$$m = 2n > n = m.$$

Doszliliśmy więc do sprzeczności z założeniem, że liczba $\log_{60} 360$ jest wymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $\log_{60} 360$ jest niewymierna.

147. Dobrać odpowiednie liczby wymierne dodatnie C oraz D i udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{6n^{11} - 3n^6 + 2}{6n^{11} - 3n^5 + 3} \leq D.$$

Liczby C i D muszą spełniać nierówność $D \leq 8C$.

W wersji trudniejszej liczby C i D spełniają nierówność $D \leq 4C$.

W wersji najtrudniejszej liczby C i D spełniają nierówność $D \leq 2C$.

Rozwiązanie:

Przeprowadzamy szacowanie od góry:

$$\frac{6n^{11} - 3n^6 + 2}{6n^{11} - 3n^5 + 3} \leq \frac{6n^{11} - 0 + 2n^{11}}{6n^{11} - 3n^{11} + 0} = \frac{8n^{11}}{3n^{11}} = \frac{8}{3} = D.$$

Przeprowadzamy szacowanie od dołu:

$$\frac{6n^{11} - 3n^6 + 2}{6n^{11} - 3n^5 + 3} \geq \frac{6n^{11} - 3n^{11} + 0}{6n^{11} - 0 + 3n^{11}} = \frac{3n^{11}}{9n^{11}} = \frac{1}{3} = C,$$

co daje zależność $D = 8C$ wystarczającą do rozwiązania najłatwiejszej wersji zadania.

Subtelniejsze szacowania wykorzystują nierówności $-3n^6 + 2 \leq -3 + 2 = -1 < 0$ oraz $-3n^5 + 3 \leq -3 + 3 = 0$ zamiast odpowiednio $-3n^6 \leq 0$ oraz $-3n^5 \leq 0$ i wyglądają następująco:

$$\begin{aligned} \frac{6n^{11} - 3n^6 + 2}{6n^{11} - 3n^5 + 3} &= \frac{6n^{11} + (-3n^6 + 2)}{6n^{11} - 3n^5 + 3} \leq \frac{6n^{11} - 0}{6n^{11} - 3n^{11} + 0} = \frac{6n^{11}}{3n^{11}} = 2 = D, \\ \frac{6n^{11} - 3n^6 + 2}{6n^{11} - 3n^5 + 3} &= \frac{6n^{11} - 3n^6 + 2}{6n^{11} + (-3n^5 + 3)} \geq \frac{6n^{11} - 3n^{11} + 0}{6n^{11} - 0} = \frac{3n^{11}}{6n^{11}} = \frac{1}{2} = C. \end{aligned}$$

To daje zależność $D = 4C$ wystarczającą do rozwiązania wersji trudniejszej.

Można też zauważyć, że

$$6n^{11} - 3n^6 + 2 \leq 6n^{11} - 3n^5 + 2 < 6n^{11} - 3n^5 + 3,$$

skąd

$$\frac{6n^{11} - 3n^6 + 2}{6n^{11} - 3n^5 + 3} < 1 = D.$$

Zatem rozwiązanie wersji trudniejszej można uzyskać także przy użyciu szacowań z $C = 1/3$ oraz $D = 1$.

Przedstawione wyżej szacowania z $C = 1/2$ oraz $D = 1$ składają się na rozwiązanie wersji najtrudniejszej.

148. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$(2n+7) \cdot \binom{2n}{n} > 4^{n+1}.$$

Rozwiązanie:

Zamierzamy przeprowadzić dowód indukcyjny.

1° (w tej chwili wydaje nam się, że jest to pierwszy krok indukcyjny) Dla $n=1$ mamy

$$(2n+7) \cdot \binom{2n}{n} = 9 \cdot 2 = 18$$

oraz

$$4^{n+1} = 4^2 = 16,$$

a zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $18 > 16$, jest więc prawdziwa.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$(2n+7) \cdot \binom{2n}{n} > 4^{n+1}.$$

Chcemy wykazać, że

$$(2n+9) \cdot \binom{2n+2}{n+1} > 4^{n+2}.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności otrzymujemy

$$\begin{aligned} (2n+9) \cdot \binom{2n+2}{n+1} &= \frac{(2n+9)(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} = \frac{(2n+9)(2n)!(2n+1)(2n+2)}{n!(n+1)n!(n+1)} = \\ &= (2n+7) \cdot \binom{2n}{n} \cdot \frac{(2n+9)(2n+1)(2n+2)}{(2n+7)(n+1)^2} = (2n+7) \cdot \binom{2n}{n} \cdot \frac{2(2n+9)(2n+1)}{(2n+7)(n+1)} > \\ &> 4^{n+1} \cdot \frac{2(2n+9)(2n+1)}{(2n+7)(n+1)} \geq 4^{n+1} \cdot 4 = 4^{n+2}, \end{aligned}$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{2(2n+9)(2n+1)}{(2n+7)(n+1)} \geq 4.$$

Powyższa nierówność jest równoważna kolejnym nierównościom

$$2(2n+9)(2n+1) \geq 4(2n+7)(n+1),$$

$$(2n+9)(2n+1) \geq 2(2n+7)(n+1),$$

$$4n^2 + 18n + 2n + 9 \geq 2(2n^2 + 7n + 2n + 7),$$

$$4n^2 + 20n + 9 \geq 4n^2 + 18n + 14,$$

$$2n \geq 5,$$

$$n \geq 5/2.$$

Wobec tego, że liczba n jest całkowita, powyższa nierówność jest równoważna nierówności $n \geq 3$.

Drugi krok indukcyjny został więc przeprowadzony tylko dla $n \geq 3$.

Dla kompletności dowodu należy sprawdzić daną w treści zadania nierówność dla $n = 2$ oraz dla $n = 3$. Sprawdzenie dla $n = 3$ okazuje się przejmować rolę pierwszego kroku indukcyjnego, a sprawdzenie dla $n = 2$ weryfikuje dowodzoną nierówność w przypadku, który dotąd nie został sprawdzony, ani też nie wynika z dowodu indukcyjnego.

Dla $n = 2$ otrzymujemy

$$11 \cdot \binom{4}{2} = 11 \cdot 6 = 66 > 64 = 4^3.$$

1° (to okazuje się być pierwszym krokiem indukcyjnym) Dla $n = 3$ otrzymujemy

$$13 \cdot \binom{6}{3} = 13 \cdot 20 = 260 > 256 = 4^4.$$

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej $n \geq 3$, a ponadto wykonaliśmy bezpośrednie sprawdzenie dla $n = 1$ oraz dla $n = 2$.

Uwaga:

Sprawdzenie dla $n = 3$ nie wydaje się wymagać wiele pracy, jednak brak świadomości konieczności wykonania tego sprawdzenia jest bardzo poważnym błędem.

149. Dobrać odpowiednie liczby wymierne dodatnie g oraz C i udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$g - \frac{C}{n} < \sqrt[4]{n^4 + n^3} - n < g + \frac{C}{n}.$$

Rozwiązanie:

Nierówności dane w treści zadania można przepisać w postaci

$$\left| \sqrt[4]{n^4 + n^3} - n - g \right| < \frac{C}{n}. \quad (\spadesuit)$$

Sposób I

Korzystając dwukrotnie ze wzoru na różnicę kwadratów, przepisujemy lewą stronę nierówności $(\spadesuit)$ w postaci niezawierającej różnicy wyrażeń zbliżonej wielkości:

$$\begin{aligned} \left| \sqrt[4]{n^4 + n^3} - n - g \right| &= \left| \sqrt[4]{n^4 + n^3} - (n + g) \right| = \frac{\left| \sqrt{n^4 + n^3} - (n + g)^2 \right|}{\sqrt[4]{n^4 + n^3} + n + g} = \\ &= \frac{|n^4 + n^3 - (n + g)^4|}{\left(\sqrt[4]{n^4 + n^3} + n + g \right) \cdot \left(\sqrt{n^4 + n^3} + (n + g)^2 \right)} = \\ &= \frac{|n^4 + n^3 - n^4 - 4gn^3 - 6g^2n^2 - 4g^3n - g^4|}{\left(\sqrt[4]{n^4 + n^3} + n + g \right) \cdot \left(\sqrt{n^4 + n^3} + (n + g)^2 \right)} = \\ &= \frac{|(1 - 4g)n^3 - 6g^2n^2 - 4g^3n - g^4|}{\left(\sqrt[4]{n^4 + n^3} + n + g \right) \cdot \left(\sqrt{n^4 + n^3} + (n + g)^2 \right)}. \end{aligned}$$

W liczniku ostatniego wyrażenia dominującym składnikiem wydaje się być $(1-4g)n^3$. Aby wyrażenie to miało możliwie mały rząd wielkości, dobieramy g tak, aby ten składnik był równy zero, czyli przyjmujemy $g = 1/4$. Przy tej wartości g (której nie podstawiamy od razu do wzoru, aby uniknąć niepotrzebnych rachunków na ułamkach szacowanych później przez zero) wykonujemy szacowanie od góry:

$$\begin{aligned} \frac{|-6g^2n^2 - 4g^3n - g^4|}{\left(\sqrt[4]{n^4+n^3+n+g}\right) \cdot \left(\sqrt{n^4+n^3+(n+g)^2}\right)} &= \frac{6g^2n^2 + 4g^3n + g^4}{\left(\sqrt[4]{n^4+n^3+n+g}\right) \cdot \left(\sqrt{n^4+n^3+(n+g)^2}\right)} < \\ < \frac{6g^2n^2 + 4g^3n^2 + g^4n^2}{\left(\sqrt[4]{n^4+0+n+0}\right) \cdot \left(\sqrt{n^4+0+(n+0)^2}\right)} &= \frac{(6g^2 + 4g^3 + g^4) \cdot n^2}{2n \cdot 2n^2} = \frac{6g^2 + 4g^3 + g^4}{4n} = \frac{C}{n}, \end{aligned}$$

co kończy rozwiązanie zadania z

$$C = \frac{6g^2 + 4g^3 + g^4}{4} = \frac{6 \cdot 16 + 4 \cdot 4 + 1}{1024} = \frac{96 + 16 + 1}{1024} = \frac{113}{1024}.$$

Końcówkę oszacowań można też wykonać w oparciu o zależności $4g = 1$, czyli $4g^3 = g^2$ oraz $g^2 < 1$, czyli $g^4 < g^2$. Otrzymamy wówczas

$$\frac{6g^2 + 4g^3 + g^4}{4n} < \frac{6g^2 + g^2 + g^2}{4n} = \frac{8g^2}{4n} = \frac{8}{4^2 \cdot 4n} = \frac{1/8}{n},$$

co zakończy rozwiązanie zadania z $C = 1/8$.

Sposób II

Zamiast korzystać dwukrotnie ze wzoru na różnicę kwadratów, można skorzystać ze wzoru na różnicę czwartych potęg w postaci

$$a - b = \frac{a^4 - b^4}{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3}.$$

Wówczas lewą stronę nierówności (♠) można przepisać jako

$$\begin{aligned} \left| \sqrt[4]{n^4+n^3} - n - g \right| &= \frac{|n^4 + n^3 - (n+g)^4|}{\left(\sqrt[4]{n^4+n^3}\right)^3 + (n+g) \cdot \left(\sqrt[4]{n^4+n^3}\right)^2 + (n+g)^2 \cdot \sqrt[4]{n^4+n^3} + (n+g)^3} = \\ &= \frac{|n^4 + n^3 - n^4 - 4gn^3 - 6g^2n^2 - 4g^3n - g^4|}{\left(\sqrt[4]{n^4+n^3}\right)^3 + (n+g) \cdot \left(\sqrt[4]{n^4+n^3}\right)^2 + (n+g)^2 \cdot \sqrt[4]{n^4+n^3} + (n+g)^3} = \\ &= \frac{|(1-4g)n^3 - 6g^2n^2 - 4g^3n - g^4|}{\left(\sqrt[4]{n^4+n^3}\right)^3 + (n+g) \cdot \left(\sqrt[4]{n^4+n^3}\right)^2 + (n+g)^2 \cdot \sqrt[4]{n^4+n^3} + (n+g)^3}. \end{aligned}$$

W liczniku ostatniego wyrażenia dominującym składnikiem wydaje się być $(1-4g)n^3$. Aby wyrażenie to miało możliwie mały rząd wielkości, dobieramy g tak, aby ten składnik był równy zero, czyli przyjmujemy $g = 1/4$. Przy tej wartości g (której nie podstawiamy od razu do wzoru, aby uniknąć niepotrzebnych rachunków na ułamkach szacowanych później przez zero) wykonujemy szacowanie od góry:

$$\begin{aligned} \frac{|-6g^2n^2 - 4g^3n - g^4|}{\left(\sqrt[4]{n^4+n^3}\right)^3 + (n+g) \cdot \left(\sqrt[4]{n^4+n^3}\right)^2 + (n+g)^2 \cdot \sqrt[4]{n^4+n^3} + (n+g)^3} &= \\ &= \frac{6g^2n^2 + 4g^3n + g^4}{\left(\sqrt[4]{n^4+n^3}\right)^3 + (n+g) \cdot \left(\sqrt[4]{n^4+n^3}\right)^2 + (n+g)^2 \cdot \sqrt[4]{n^4+n^3} + (n+g)^3} < \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&< \frac{6g^2n^2 + 4g^3n^2 + g^4n^2}{\left(\sqrt[4]{n^4+0}\right)^3 + (n+0) \cdot \left(\sqrt[4]{n^4+0}\right)^2 + (n+0)^2 \cdot \sqrt[4]{n^4+0} + (n+0)^3} = \\
&= \frac{(6g^2 + 4g^3 + g^4) \cdot n^2}{4n^3} = \frac{6g^2 + 4g^3 + g^4}{4n}.
\end{aligned}$$

Dalsza część rozwiązania przebiega tak samo jak w sposobie I.

Sposób III (dość karkołomny rachunkowo i nie polecany, ale chodzi o pokazanie, że tak też można)

Stosujemy wzory skróconego mnożenia do środkowej strony nierówności danej w treści zadania:

$$\sqrt[4]{n^4+n^3} - n = \frac{n^3}{\left(\sqrt[4]{n^4+n^3}\right)^3 + n \cdot \left(\sqrt[4]{n^4+n^3}\right)^2 + n^2 \cdot \sqrt[4]{n^4+n^3} + n^3}.$$

Zwracamy uwagę, że dla dużych n składniki n^3 występujące pod pierwiastkami w mianowniku ostatniego wyrażenia mają niewielki wpływ na jego wartość i zgadujemy, że $g = 1/4$.

Wobec tego

$$\begin{aligned}
\left| \sqrt[4]{n^4+n^3} - n - g \right| &= \left| \frac{n^3}{\left(\sqrt[4]{n^4+n^3}\right)^3 + n \cdot \left(\sqrt[4]{n^4+n^3}\right)^2 + n^2 \cdot \sqrt[4]{n^4+n^3} + n^3} - \frac{1}{4} \right| = \\
&= \left| \frac{4n^3 - \left(\left(\sqrt[4]{n^4+n^3}\right)^3 + n \cdot \left(\sqrt[4]{n^4+n^3}\right)^2 + n^2 \cdot \sqrt[4]{n^4+n^3} + n^3 \right)}{4 \cdot \left(\left(\sqrt[4]{n^4+n^3}\right)^3 + n \cdot \left(\sqrt[4]{n^4+n^3}\right)^2 + n^2 \cdot \sqrt[4]{n^4+n^3} + n^3 \right)} \right| = \\
&= \frac{\left| 3n^3 - \left(\sqrt[4]{n^4+n^3}\right)^3 - n \cdot \left(\sqrt[4]{n^4+n^3}\right)^2 - n^2 \cdot \sqrt[4]{n^4+n^3} \right|}{4 \cdot \left(\left(\sqrt[4]{n^4+n^3}\right)^3 + n \cdot \left(\sqrt[4]{n^4+n^3}\right)^2 + n^2 \cdot \sqrt[4]{n^4+n^3} + n^3 \right)}.
\end{aligned}$$

Korzystając z tożsamości

$$3a^3 - b^3 - ab^2 - a^2b = (a-b) \cdot (3a^2 + 2ab + b^2)$$

oraz z przytoczonego w sposobie I wzoru na różnicę czwartych potęg kontynuujemy przekształcanie, a następnie szacujemy od góry:

$$\begin{aligned}
&\frac{\left| 3n^3 - \left(\sqrt[4]{n^4+n^3}\right)^3 - n \cdot \left(\sqrt[4]{n^4+n^3}\right)^2 - n^2 \cdot \sqrt[4]{n^4+n^3} \right|}{4 \cdot \left(\left(\sqrt[4]{n^4+n^3}\right)^3 + n \cdot \left(\sqrt[4]{n^4+n^3}\right)^2 + n^2 \cdot \sqrt[4]{n^4+n^3} + n^3 \right)} = \\
&= \frac{\left| n - \sqrt[4]{n^4+n^3} \right| \cdot \left(3n^2 + 2n \cdot \sqrt[4]{n^4+n^3} + \left(\sqrt[4]{n^4+n^3}\right)^2 \right)}{4 \cdot \left(\left(\sqrt[4]{n^4+n^3}\right)^3 + n \cdot \left(\sqrt[4]{n^4+n^3}\right)^2 + n^2 \cdot \sqrt[4]{n^4+n^3} + n^3 \right)} = \\
&= \frac{n^3 \cdot \left(3n^2 + 2n \cdot \sqrt[4]{n^4+n^3} + \sqrt{n^4+n^3} \right)}{4 \cdot \left(\left(\sqrt[4]{n^4+n^3}\right)^3 + n \cdot \left(\sqrt[4]{n^4+n^3}\right)^2 + n^2 \cdot \sqrt[4]{n^4+n^3} + n^3 \right)^2} <
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&< \frac{n^3 \cdot (3n^2 + 2n \cdot \sqrt[4]{n^4 + 15n^4} + \sqrt{n^4 + 3n^4})}{4 \cdot \left((\sqrt[4]{n^4 + 0})^3 + n \cdot (\sqrt[4]{n^4 + 0})^2 + n^2 \cdot \sqrt[4]{n^4 + 0} + n^3 \right)^2} = \\
&= \frac{n^3 \cdot (3n^2 + 2n \cdot 2n + 2n^2)}{4 \cdot (4n^3)^2} = \frac{9n^5}{64n^6} = \frac{9/64}{n},
\end{aligned}$$

co kończy rozwiązanie zadania z $C = 9/64$.

Wykorzystanie oszacowania $\sqrt[4]{n^4 + n^3} < \sqrt[4]{n^4 + 4n^3} = n \cdot \sqrt[4]{5} < n \cdot \sqrt[4]{81/16} = n \cdot 3/2$ pozwoliłoby uzyskać $C = 1/8$.

Uwagi:

Liczba g jest wyznaczona jednoznacznie. Każde rozwiązanie z $g \neq 1/4$ jest błędne.

Nietrudno prześledzić powyższe rozwiązanie i stwierdzić, że w istocie zachodzą nierówności

$$\frac{1}{4} - \frac{C}{n} < \sqrt[4]{n^4 + n^3} - n < \frac{1}{4},$$

czyli składnik C/n po prawej stronie danych w treści zadania nierówności można pominąć, dowodząc tym samym nierówności mocniejszej.

150. W każdym z czterech poniższych zadań wpisz w miejscu kropek dwie liczby występujące w ciągu $0, 1, 2, 5, 10, 100, 10^5, 10^{10}, 10^{20}, 10^{50}, 10^{100}, 10^{200}, 10^{500}, 10^{1000}, 10^{2000}, 10^{5000}, 10^{10000}, 10^{20000}, 10^{50000}, 10^{100000}, 10^{200000}, 10^{500000}, 10^{1000000}$ na **kolejnych** miejscach tak, aby powstały prawdziwe nierówności.

150.1 $10^{10000} < 222^{5555} < 10^{20000}$

150.2 $10^{500} < 5555^{222} < 10^{1000}$

150.3 $10^{200000} < (10^5)! < 10^{500000}$

150.4 $10^{200} < \binom{10^5}{100} < 10^{500}$

194. Wskazać liczbę naturalną k , dla której granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2 \cdot \sqrt[6]{n^k + 1}}{n^2 + 5 \cdot \sqrt[3]{n^7 + 7} + 7 \cdot \sqrt{n^5 + 5}}$$

istnieje i jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Obliczyć wartość granicy przy tak wybranej liczbie k .

Rozwiązanie:

Dzieląc licznik i mianownik danego wyrażenia przez $n^{5/2}$ otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2 \cdot \sqrt[6]{n^k + 1}}{n^2 + 5 \cdot \sqrt[3]{n^7 + 7} + 7 \cdot \sqrt{n^5 + 5}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{n^{1/2}} + 2 \cdot \sqrt[6]{n^{k-15} + \frac{1}{n^{15}}}}{\frac{1}{n^{1/2}} + 5 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{n^{1/2}} + \frac{7}{n^{15/2}}} + 7 \cdot \sqrt{1 + \frac{5}{n^5}}}.$$

Mianownik ostatniego wyrażenia dąży do 7 przy $n \rightarrow \infty$, natomiast licznik ma granicę skończoną dodatnią dla $k = 15$ i granica licznika jest wtedy równa 2.

Odpowiedź: Przy $k = 15$ granica jest równa $2/7$.

Uwaga: Liczba $k = 15$ jest jedyną liczbą spełniającą warunki zadania. Jednak zgodnie z poleceniem wystarczyło wskazać k , bez konieczności uzasadnienia, że takie k jest tylko jedno.

195. Wskazać liczbę naturalną k , dla której granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^{14} + 9n^9 + 1} - n^7}{n^k}$$

istnieje i jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Obliczyć wartość granicy przy tak wybranej liczbie k .

Rozwiązanie:

Korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów przepisujemy występujące pod znakiem granicy wyrażenie w postaci niezawierającej w liczniku różnicy wyrażeń zbliżonej wielkości, a następnie dzielimy licznik i mianownik przez n^9 :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^{14} + 9n^9 + 1} - n^7}{n^k} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n^9 + 1}{n^k \cdot (\sqrt{n^{14} + 9n^9 + 1} + n^7)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9 + n^{-9}}{n^{k-2} \cdot (\sqrt{1 + 9n^{-5} + n^{-14}} + 1)}. \end{aligned}$$

Dla $k = 2$ otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9 + n^{-9}}{\sqrt{1 + 9n^{-5} + n^{-14}} + 1} = \frac{9 + 0}{\sqrt{1 + 0 + 0} + 1} = \frac{9}{2}.$$

Odpowiedź: Przy $k = 2$ granica jest równa $9/2$.

Uwaga: Liczba $k = 2$ jest jedyną liczbą spełniającą warunki zadania. Jednak zgodnie z poleceniem wystarczyło wskazać k , bez konieczności uzasadnienia, że takie k jest tylko jedno.

196. Ciąg (a_n) spełnia warunek

$$\forall_{\varepsilon \geq 1} \exists_N \forall_{n \geq N} |a_n - 1| \leq \varepsilon.$$

Czy stąd wynika, że

196.1 ciąg (a_n) jest zbieżny **NIE**

196.2 ciąg (a_n) jest rozbieżny **NIE**

196.3 ciąg (a_n) jest ograniczony **TAK**

196.4 wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie **NIE**

196.5 wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są nieujemne **NIE**

196.6 od pewnego miejsca wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie **NIE**

196.7 od pewnego miejsca wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są nieujemne **TAK**

196.8 w ciągu (a_n) występuje nieskończenie wiele wyrazów dodatnich **NIE**

196.9 w ciągu (a_n) występuje nieskończenie wiele wyrazów nieujemnych **TAK**

196.10 w ciągu (a_n) występuje co najmniej jeden wyraz dodatni **NIE**

196.11 w ciągu (a_n) występuje co najmniej jeden wyraz nieujemny **TAK**

196.12 $\forall_n a_n > 0$ **NIE**

196.13 $\forall_n a_n \geq 0$ **NIE**

$$\mathbf{196.14} \quad \exists_N \forall_{n \geq N} a_n > 0 \quad \mathbf{NIE}$$

$$\mathbf{196.15} \quad \exists_N \forall_{n \geq N} a_n \geq 0 \quad \mathbf{TAK}$$

$$\mathbf{196.16} \quad \forall_N \exists_{n \geq N} a_n > 0 \quad \mathbf{NIE}$$

$$\mathbf{196.17} \quad \forall_N \exists_{n \geq N} a_n \geq 0 \quad \mathbf{TAK}$$

$$\mathbf{196.18} \quad \exists_n a_n > 0 \quad \mathbf{NIE}$$

$$\mathbf{196.19} \quad \exists_n a_n \geq 0 \quad \mathbf{TAK}$$

$$\mathbf{197.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3}{5n^2 + 7} = \frac{2}{5}$$

$$\mathbf{198.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3}{5^n + 7} = 0$$

$$\mathbf{199.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2 + 9}}{25n^2 + 49} = 0$$

$$\mathbf{200.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4 \cdot 9^n + 25}}{25 \cdot 3^n + 49} = \frac{2}{25}$$

$$\mathbf{201.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + 7n}{2 + 5n} = \frac{7}{5}$$

$$\mathbf{202.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4 + 7n}{2 + 5n} + \frac{1}{n} \right) = \frac{7}{5}$$

$$\mathbf{203.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4 + 7n}{2 + 5n} + \frac{n^2 + 1}{n} \right) = +\infty$$

$$\mathbf{204.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4 + 7n}{2 + 5n} + (-1)^n \right) = \mathbf{R}$$

$$\mathbf{205.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{206.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2n + \sqrt{n}} - \sqrt{2n} \right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\mathbf{207.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{4n + \sqrt{n}} - 2\sqrt{n} \right) = \frac{1}{4}$$

$$\mathbf{208.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^3 + n\sqrt{n}} - n\sqrt{n} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{209.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2n^3 + n\sqrt{n}} - n\sqrt{2n} \right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\mathbf{210.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{4n^3 + n\sqrt{n}} - 2n\sqrt{n} \right) = \frac{1}{4}$$