

230. Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\binom{n}{0}}{\sqrt{4^n+1}} + \frac{\binom{n}{1}}{\sqrt{4^n+3}} + \frac{\binom{n}{2}}{\sqrt{4^n+9}} + \frac{\binom{n}{3}}{\sqrt{4^n+27}} + \dots + \frac{\binom{n}{n-1}}{\sqrt{4^n+3^{n-1}}} + \frac{\binom{n}{n}}{\sqrt{4^n+3^n}} \right).$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez b_n . Zamierzamy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach, co wymaga oszacowania b_n od góry i od dołu przez ciągi zbieżne do wspólnej granicy.

Zauważmy, że składniki tej sumy bardzo się różnią – ilorazy środkowych składników do skrajnych dążą do nieskończoności przy n dążącym do nieskończoności. Należy zatem oczekiwać, że oszacowanie sumy poprzez wspólne oszacowanie składników (i przemnożenie tego oszacowania przez liczbę składników), będzie prowadzić do oszacowań mających różne granice, co uniemożliwi skorzystanie z twierdzenia o trzech ciągach.

Zauważmy też, że za tak znaczną różnicę wielkości składników odpowiadają liczniki, podczas gdy mianowniki mają zbliżoną wielkość. Liczniki tworzą jednak n -ty wiersz trójkąta Pascala, a więc ich sumę bez problemu możemy obliczyć. W konsekwencji będziemy szacować mianowniki przez wspólną wielkość, nie zmieniając liczników, a następnie dodamy składniki powstałe w wyniku tego oszacowania.

I tak, szacowanie od góry (czyli szacowanie mianowników od dołu) prowadzi do

$$\begin{aligned} b_n &\leq \frac{\binom{n}{0}}{\sqrt{4^n+0}} + \frac{\binom{n}{1}}{\sqrt{4^n+0}} + \frac{\binom{n}{2}}{\sqrt{4^n+0}} + \frac{\binom{n}{3}}{\sqrt{4^n+0}} + \dots + \frac{\binom{n}{n-1}}{\sqrt{4^n+0}} + \frac{\binom{n}{n}}{\sqrt{4^n+0}} = \\ &= \frac{\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}}{2^n} = c_n \end{aligned}$$

Z kolei szacowanie od dołu (czyli szacowanie mianowników od góry) prowadzi do

$$\begin{aligned} b_n &\geq \frac{\binom{n}{0}}{\sqrt{4^n+3^n}} + \frac{\binom{n}{1}}{\sqrt{4^n+3^n}} + \frac{\binom{n}{2}}{\sqrt{4^n+3^n}} + \frac{\binom{n}{3}}{\sqrt{4^n+3^n}} + \dots + \frac{\binom{n}{n-1}}{\sqrt{4^n+3^n}} + \frac{\binom{n}{n}}{\sqrt{4^n+3^n}} = \\ &= \frac{\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}}{\sqrt{4^n+3^n}} = a_n. \end{aligned}$$

Ze wzoru na sumę wyrazów n -tego wiersza trójkąta Pascala otrzymujemy

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Wobec tego

$$c_n = \frac{2^n}{2^n} = 1 \rightarrow 1$$

przy $n \rightarrow \infty$ i podobnie

$$a_n = \frac{2^n}{\sqrt{4^n+3^n}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n}} \rightarrow 1.$$

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$a_n \leq b_n \leq c_n,$$

a ponadto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 1$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1.$$

Odpowiedź: Wartość granicy podanej w treści zadania jest równa 1.

231. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^4 - n^2 + 1}{5n^5 - n^3 + 1} + \frac{3n^4 - 2n^2 + 4}{5n^5 - 2n^3 + 8} + \frac{3n^4 - 3n^2 + 9}{5n^5 - 3n^3 + 27} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{3n^4 - kn^2 + k^2}{5n^5 - kn^3 + k^3} + \dots + \frac{3n^4 - 2n^3 + 4n^2}{5n^5 - 2n^4 + 8n^3} \right).$$

Rozwiązanie:

Dana pod znakiem granicy suma ma $2n$ składników i zapisuje się wzorem

$$b_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{3n^4 - kn^2 + k^2}{5n^5 - kn^3 + k^3}.$$

Szacowanie od góry daje

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{3n^4 - kn^2 + k^2}{5n^5 - kn^3 + k^3} \leq \sum_{k=1}^{2n} \frac{3n^4 - 0 + 4n^2}{5n^5 - 2n^4 + 0} = \frac{2n(3n^4 + 4n^2)}{5n^5 - 2n^4} = c_n.$$

Szacując od dołu otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{3n^4 - kn^2 + k^2}{5n^5 - kn^3 + k^3} \geq \sum_{k=1}^{2n} \frac{3n^4 - 2n^3 + 0}{5n^5 - 0 + 8n^3} = \frac{2n(3n^4 - 2n^3)}{5n^5 + 8n^3} = a_n.$$

Ponieważ dla dowolnego n zachodzą nierówności

$$a_n \leq b_n \leq c_n,$$

a ponadto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 6/5,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 6/5.$$

232. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n^3 + 3}{\sqrt{n^{10} + 3}} + \frac{5n^3 + 6}{\sqrt{n^{10} + 6}} + \frac{5n^3 + 9}{\sqrt{n^{10} + 9}} + \frac{5n^3 + 12}{\sqrt{n^{10} + 12}} + \dots + \frac{5n^3 + 6n^2}{\sqrt{n^{10} + 6n^2}} \right).$$

Rozwiązanie:

Dana pod znakiem granicy suma ma $2n^2$ składników i zapisuje się wzorem

$$b_n = \sum_{k=1}^{2n^2} \frac{5n^3 + 3k}{\sqrt{n^{10} + 3k}}.$$

Szacowanie od góry daje

$$\sum_{k=1}^{2n^2} \frac{5n^3 + 3k}{\sqrt{n^{10} + 3k}} \leq \sum_{k=1}^{2n^2} \frac{5n^3 + 6n^2}{\sqrt{n^{10} + 0}} = \frac{2n^2(5n^3 + 6n^2)}{n^5} = c_n.$$

Szacując od dołu otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{2n^2} \frac{5n^3 + 3k}{\sqrt{n^{10} + 3k}} \geq \sum_{k=1}^{2n^2} \frac{5n^3 + 0}{\sqrt{n^{10} + 6n^2}} = \frac{2n^2 \cdot 5n^3}{\sqrt{n^{10} + 6n^2}} = a_n.$$

Ponieważ dla dowolnego n zachodzą nierówności

$$a_n \leq b_n \leq c_n,$$

a ponadto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n^5}{\sqrt{n^{10} + 6n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10}{\sqrt{1 + 6n^{-8}}} = 10$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2(5n^3 + 6n^2)}{n^5} = \lim_{n \rightarrow \infty} (10 + 12n^{-1}) = 10,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 10.$$

233. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n^2 + 1}{n^3 + \sqrt{n^6 + 1}} + \frac{4n^2 + 2}{n^3 + \sqrt{n^6 + 2}} + \frac{4n^2 + 3}{n^3 + \sqrt{n^6 + 3}} + \frac{4n^2 + 4}{n^3 + \sqrt{n^6 + 4}} + \dots + \frac{4n^2 + 6n}{n^3 + \sqrt{n^6 + 6n}} \right).$$

Rozwiązanie:

Dana pod znakiem granicy suma ma $6n$ składników i zapisuje się wzorem

$$b_n = \sum_{k=1}^{6n} \frac{4n^2 + k}{n^3 + \sqrt{n^6 + k}}.$$

Szacowanie od góry daje

$$\sum_{k=1}^{6n} \frac{4n^2 + k}{n^3 + \sqrt{n^6 + k}} \leq \sum_{k=1}^{6n} \frac{4n^2 + 6n}{n^3 + \sqrt{n^6 + 0}} = \frac{6n(4n^2 + 6n)}{2n^3} = c_n.$$

Szacując od dołu otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{6n} \frac{4n^2 + k}{n^3 + \sqrt{n^6 + k}} \geq \sum_{k=1}^{6n} \frac{4n^2 + 0}{n^3 + \sqrt{n^6 + 6n}} = \frac{6n \cdot 4n^2}{n^3 + \sqrt{n^6 + 6n}} = a_n.$$

Ponieważ dla dowolnego n zachodzą nierówności

$$a_n \leq b_n \leq c_n,$$

a ponadto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{24n^3}{n^3 + \sqrt{n^6 + 6n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{24}{1 + \sqrt{1 + 6n^{-5}}} = 12$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n(4n^2 + 6n)}{2n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} (12 + 36n^{-1}) = 12,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 12.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu granica istnieje i jest równa 12.

234. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^3} + \frac{n}{n^3+1} + \frac{n}{n^3+2} + \frac{n}{n^3+3} + \frac{n}{n^3+4} + \frac{n}{n^3+5} + \frac{n}{n^3+6} + \dots + \frac{n}{(n+1)^3} \right).$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez b_n i zauważmy, że ma ona $3n^2 + 3n + 2$ składników.

Zachodzą wówczas oszacowania od góry

$$b_n \leq (3n^2 + 3n + 2) \cdot \frac{n}{n^3} = c_n$$

oraz od dołu

$$b_n \geq (3n^2 + 3n + 2) \cdot \frac{n}{(n+1)^3} = a_n.$$

Ponieważ dla dowolnego n zachodzą nierówności

$$a_n \leq b_n \leq c_n,$$

a ponadto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 3n + 2}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2} \right) = 3$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n^2 + 3n + 2) \cdot n}{(n+1)^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3} = 3,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 3.$$

235. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{k \cdot n^k + 1}}{n^7 + 1} + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 2}}{n^7 + 4} + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 3}}{n^7 + 9} + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 4}}{n^7 + 16} + \dots + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + n^3}}{n^7 + n^6} \right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej dodatniej parametru k , aby powyższa granica była dodatnia i skończona.

Rozwiązanie:

Zauważamy, że dana w zadaniu suma ma n^3 wyrazów. Szacujemy ją obustronnie:

$$n^3 \cdot \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 0}}{n^7 + n^6} \leq \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 1}}{n^7 + 1} + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 2}}{n^7 + 4} + \dots + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + n^3}}{n^7 + n^6} \leq n^3 \cdot \frac{\sqrt{k \cdot n^k + n^3}}{n^7 + 0},$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego.

$$n^3 \cdot \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 0}}{n^7 + n^6} = \frac{\sqrt{k \cdot n^k}}{n^4 + n^3} = \frac{\sqrt{k} \cdot n^{k/2}}{n^4 + n^3} = \frac{\sqrt{k} \cdot n^{k/2-4}}{1 + \frac{1}{n}} \rightarrow \sqrt{k},$$

o ile $k/2 - 4 = 0$, czyli $k = 8$.

$$n^3 \cdot \frac{\sqrt{k \cdot n^k + n^3}}{n^7} = \sqrt{k \cdot n^{k/2-4} + \frac{1}{n^5}} \rightarrow \sqrt{k},$$

o ile $k/2 - 4 = 0$, czyli $k = 8$.

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że dla $k = 8$ granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

236. Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n^2}^{n^3} \frac{\sqrt{n^p + k}}{n^7 + k^2}$$

dobierając tak wartość parametru p , aby granica ta była dodatnia i skończona.

Rozwiązanie:

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez b_n i zauważmy, że ma ona $n^3 - n^2 + 1$ składników.

Zachodzą wówczas oszacowania od góry

$$b_n \leq (n^3 - n^2 + 1) \cdot \frac{\sqrt{n^p + n^3}}{n^7 + n^4} = \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}\right) \cdot \frac{\sqrt{n^{p-8} + \frac{1}{n^5}}}{1 + \frac{1}{n^3}} = c_n$$

oraz od dołu

$$b_n \geq (n^3 - n^2 + 1) \cdot \frac{\sqrt{n^p + n^2}}{n^7 + n^6} = \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}\right) \cdot \frac{\sqrt{n^{p-8} + \frac{1}{n^6}}}{1 + \frac{1}{n}} = a_n.$$

Ponieważ dla dowolnego n zachodzą nierówności

$$a_n \leq b_n \leq c_n,$$

a ponadto dla $p = 8$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 1$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1.$$

Odpowiedź: Dla $p = 8$ wartość granicy jest równa 1.

237. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^p + 1}{\sqrt{900n^{900} + 1}} + \frac{n^p + 8}{\sqrt{900n^{900} + 32}} + \dots + \frac{n^p + k^3}{\sqrt{900n^{900} + k^5}} + \dots + \frac{n^p + 8n^{18}}{\sqrt{900n^{900} + 32n^{30}}} \right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej dodatniej parametru p , aby powyższa granica była dodatnia i skończona.

Rozwiązanie:

Zauważamy, że dana w zadaniu suma ma $2n^6$ składników. Szacujemy ją obustronnie:

$$2n^6 \cdot \frac{n^p + 0}{\sqrt{900n^{900} + 32n^{30}}} \leq \sum_{k=1}^{2n^6} \frac{n^p + k^3}{\sqrt{900n^{900} + k^5}} \leq 2n^6 \cdot \frac{n^p + 8n^{18}}{\sqrt{900n^{900} + 0}} = 2n^6 \cdot \frac{n^p + 8n^{18}}{30n^{450}},$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego.

$$2n^6 \cdot \frac{n^p + 0}{\sqrt{900n^{900} + 32n^{30}}} = \frac{2n^{p+6}}{\sqrt{900n^{900} + 32n^{30}}} = \frac{2n^{p-444}}{\sqrt{900 + 32n^{-870}}} \rightarrow \frac{2 \cdot 1}{\sqrt{900 + 0}} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15},$$

o ile $p - 444 = 0$, czyli $p = 444$.

$$2n^6 \cdot \frac{n^p + 8n^{18}}{30n^{450}} = \frac{2n^{p+6} + 16n^{24}}{30n^{450}} = \frac{2n^{p-444} + 16n^{-426}}{30} \rightarrow \frac{2 \cdot 1 + 0}{30} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15},$$

o ile $p - 444 = 0$, czyli $p = 444$.

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że dla $p = 444$ dana w zadaniu granica jest równa $1/15$.

238. Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{\sqrt{n^4 + n}} + \frac{n+1}{\sqrt{n^4 + n+1}} + \frac{n+2}{\sqrt{n^4 + n+2}} + \frac{n+3}{\sqrt{n^4 + n+3}} + \dots + \frac{9n}{\sqrt{n^4 + 9n}} \right).$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez b_n . Zamierzamy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach, co wymaga oszacowania b_n od góry i od dołu przez ciągi zbieżne do wspólnej granicy.

Zauważmy, że składniki tej sumy bardzo się różnią – iloraz ostatniego składnika do pierwszego dąży do 9 przy n dążącym do nieskończoności. Należy zatem oczekiwać, że oszacowanie sumy poprzez wspólne oszacowanie składników (i przemnożenie tego oszacowania przez liczbę składników), będzie prowadzić do oszacowań mających różne granice, co uniemożliwi skorzystanie z twierdzenia o trzech ciągach.

Zauważmy też, że za tak znaczną różnicę wielkości składników odpowiadają liczniki, podczas gdy mianowniki mają zbliżoną wielkość. Liczniki tworzą jednak postęp arytmetyczny, którego sumę bez problemu możemy obliczyć. W konsekwencji będziemy szacować mianowniki przez wspólną wielkość, nie zmieniając liczników, a następnie dodamy składniki powstałe w wyniku tego oszacowania.

I tak, szacowanie od góry (czyli szacowanie mianowników od dołu) prowadzi do

$$\begin{aligned} b_n &\leq \frac{n}{\sqrt{n^4 + n}} + \frac{n+1}{\sqrt{n^4 + n}} + \frac{n+2}{\sqrt{n^4 + n}} + \frac{n+3}{\sqrt{n^4 + n}} + \dots + \frac{9n}{\sqrt{n^4 + n}} = \\ &= \frac{n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + \dots + 9n}{\sqrt{n^4 + n}} = c_n \end{aligned}$$

Z kolei szacowanie od dołu (czyli szacowanie mianowników od góry) prowadzi do

$$\begin{aligned} b_n &\geq \frac{n}{\sqrt{n^4 + 9n}} + \frac{n+1}{\sqrt{n^4 + 9n}} + \frac{n+2}{\sqrt{n^4 + 9n}} + \frac{n+3}{\sqrt{n^4 + 9n}} + \dots + \frac{9n}{\sqrt{n^4 + 9n}} = \\ &= \frac{n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + \dots + 9n}{\sqrt{n^4 + 9n}} = a_n. \end{aligned}$$

Ze wzoru na sumę postępu arytmetycznego otrzymujemy

$$n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + \dots + 9n = (8n+1) \cdot \frac{n+9n}{2} = 5n \cdot (8n+1),$$

gdzie $8n+1$ jest liczbą wyrazów powyższego postępu.

Wobec tego

$$c_n = \frac{5n \cdot (8n+1)}{\sqrt{n^4+n}} = \frac{5 \cdot \left(8 + \frac{1}{n}\right)}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^3}}} \rightarrow 40$$

przy $n \rightarrow \infty$ i podobnie

$$a_n = \frac{5n \cdot (8n+1)}{\sqrt{n^4+9n}} = \frac{5 \cdot \left(8 + \frac{1}{n}\right)}{\sqrt{1 + \frac{9}{n^3}}} \rightarrow 40.$$

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$a_n \leq b_n \leq c_n,$$

a ponadto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 40$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 40,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 40.$$

Odpowiedź: Wartość granicy podanej w treści zadania jest równa 40.

239. Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n^2}{n^3} + \frac{4n^2+n}{n^3+1} + \frac{4n^2+2n}{n^3+2} + \frac{4n^2+3n}{n^3+3} + \frac{4n^2+4n}{n^3+4} + \dots + \frac{9n^2-n}{n^3+5n-1} + \frac{9n^2}{n^3+5n} \right).$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez b_n . Zamierzamy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach, co wymaga oszacowania b_n od góry i od dołu przez ciągi zbieżne do wspólnej granicy.

Zauważmy, że składniki tej sumy bardzo się różnią – iloraz ostatniego składnika do pierwszego dąży do $9/4$ przy n dążącym do nieskończoności. Należy zatem ocenić, że oszacowanie sumy poprzez wspólne oszacowanie składników (i przemnożenie tego oszacowania przez liczbę składników), będzie prowadzić do oszacowań mających różne granice, co uniemożliwi skorzystanie z twierdzenia o trzech ciągach.

Zauważmy też, że za tak znaczną różnicę wielkości składników odpowiadają liczniki, podczas gdy mianowniki mają zbliżoną wielkość. Liczniki tworzą jednak postęp arytmetyczny, którego sumę bez problemu możemy obliczyć. W konsekwencji będziemy szacować mianowniki przez wspólną wielkość, nie zmieniając liczników, a następnie dodamy składniki powstałe w wyniku tego oszacowania.

I tak, szacowanie od góry (czyli szacowanie mianowników od dołu) prowadzi do

$$\begin{aligned} b_n &\leq \frac{4n^2}{n^3} + \frac{4n^2+n}{n^3} + \frac{4n^2+2n}{n^3} + \dots + \frac{9n^2}{n^3} = \frac{4n}{n^2} + \frac{4n+1}{n^2} + \frac{4n+2}{n^2} + \dots + \frac{9n}{n^2} = \\ &= \frac{4n + (4n+1) + (4n+2) + \dots + 9n}{n^2} = c_n \end{aligned}$$

Z kolei szacowanie od dołu (czyli szacowanie mianowników od góry) prowadzi do

$$\begin{aligned} b_n &\geq \frac{4n^2}{n^3+5n} + \frac{4n^2+n}{n^3+5n} + \frac{4n^2+2n}{n^3+5n} + \dots + \frac{9n^2}{n^3+5n} = \\ &= \frac{4n}{n^2+5} + \frac{4n+1}{n^2+5} + \frac{4n+2}{n^2+5} + \dots + \frac{9n}{n^2+5} = \frac{4n+(4n+1)+(4n+2)+\dots+9n}{n^2+5} = a_n. \end{aligned}$$

Ze wzoru na sumę postępu arytmetycznego otrzymujemy

$$4n + (4n+1) + (4n+2) + \dots + 9n = (5n+1) \cdot \frac{4n+9n}{2} = \frac{13n \cdot (5n+1)}{2},$$

gdzie $5n+1$ jest liczbą wyrazów powyższego postępu.

Wobec tego

$$c_n = \frac{13n \cdot (5n+1)}{2n^2} = \frac{13 \cdot \left(5 + \frac{1}{n}\right)}{2} \rightarrow \frac{65}{2}$$

przy $n \rightarrow \infty$ i podobnie

$$a_n = \frac{13n \cdot (5n+1)}{2n^2+10} = \frac{13 \cdot \left(5 + \frac{1}{n}\right)}{\left(2 + \frac{10}{n^2}\right)} \rightarrow \frac{65}{2}.$$

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$a_n \leq b_n \leq c_n,$$

a ponadto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{65}{2}$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{65}{2},$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{65}{2}.$$

Odpowiedź: Wartość granicy podanej w treści zadania jest równa $65/2$.