

Sprawdzian nr 4: 24.11.2014 (poniedziałek), godz. 10:15-10:35 (materiał zad. 1-400)

Kresy zbiorów.

Definicja: Zbiór $Z \subset \mathbb{R}$ nazywamy ograniczonym z góry, jeżeli

$$\exists_{M \in \mathbb{R}} \forall_{x \in Z} x \leq M.$$

Każdą liczbę rzeczywistą $M \in \mathbb{R}$ spełniającą warunek

$$\forall_{x \in Z} x \leq M$$

nazywamy ograniczeniem górnym zbioru Z .

Definicja: Zbiór $Z \subset \mathbb{R}$ nazywamy ograniczonym z dołu, jeżeli

$$\exists_{M \in \mathbb{R}} \forall_{x \in Z} x \geq M.$$

Każdą liczbę rzeczywistą $M \in \mathbb{R}$ spełniającą warunek

$$\forall_{x \in Z} x \geq M$$

nazywamy ograniczeniem dolnym zbioru Z .

Definicja: Zbiór $Z \subset \mathbb{R}$ nazywamy ograniczonym, jeżeli jest jednocześnie ograniczony z dołu i z góry.

Definicja: Jeżeli niepusty zbiór $Z \subset \mathbb{R}$ jest ograniczony z góry, to kresem górnym zbioru Z nazywamy jego najmniejsze ograniczenie górne i stosujemy oznaczenie $\sup Z$. Istnienie takiego najmniejszego ograniczenia wynika z zasady ciągłości Dedekinda. Jeżeli zbiór Z jest nieograniczony z góry, przyjmujemy $\sup Z = +\infty$. Ponadto przyjmujemy $\sup \emptyset = -\infty$. Analogicznie określamy kres dolny zbioru, oznaczany przez $\inf Z$.

Wniosek: Jeżeli niepusty zbiór $Z \subset \mathbb{R}$ jest ograniczony z góry, to liczba G jest jego kresem górnym wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{x \in Z} x \leq G$$

oraz

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{x \in Z} x > G - \varepsilon.$$

Ćwiczenia 17.11.2014 (poniedziałek): zad. 240-246, 265-306

Konwersatorium (nr 4) 18.11.2014 (wtorek): zad. 247-264, 307-330

Ćwiczenia 21.11.2014 (piątek): zad. 331-400

Niech A i B będą niepustymi ograniczonymi zbiorami liczb rzeczywistych.

Niech $a_1 = \inf A$, $a_2 = \sup A$, $b_1 = \inf B$, $b_2 = \sup B$. Co można powiedzieć o następujących kresach:

240. $\inf\{-a : a \in A\}$ **241.** $\sup\{a^2 : a \in A\}$ **242.** $\inf\{a^2 : a \in A\}$

243. $\sup\{a - b : a \in A, b \in B\}$

244. Zbiory A i B są niepuste i ograniczone. Zbiór B jest skończony i wszystkie jego elementy są różne od 0. Czy zbiór $\{\frac{a}{b} : a \in A, b \in B\}$ musi być ograniczony? Odpowiedź uzasadnić.

245. A jest takim niepustym zbiorem ograniczonym liczb rzeczywistych, że $\inf A = -3$, $\sup A = 2$. Jakie wartości mogą przyjmować kresy zbioru $\{|a| : a \in A\}$? Odpowiedź uzasadnić przykładem lub dowodem.

246. Podać przykład takich zbiorów A, B , że $\inf A = 2$, $\sup A = 7$, $\inf B = 3$, $\sup B = 10$, $\inf(A \cap B) = 4$, $\sup(A \cap B) = 6$, $A \cap \mathbb{N} = B \cap \mathbb{N} = \emptyset$.

Przeczytaj poniższe warunki. Które z nich są równoważne temu, że $g = \sup A$?

- 247.** $\left(\forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left(\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{a \in A} a < g + \varepsilon \right)$
- 248.** $\left(\forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left(\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{a \in A} |a - g| < \varepsilon \right)$
- 249.** $\left(\forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left(\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{a \in A} a > g - 2\varepsilon \right)$
- 250.** $\left(\forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left(\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{a \in A} a > g - \frac{\varepsilon}{2} \right)$
- 251.** $\left(\forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left(\forall_{n \in \mathbb{N}} \exists_{a \in A} a > g - \frac{1}{n} \right)$
- 252.** $\left(\forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left(\forall_{n \in \mathbb{N}} \exists_{a \in A} n^2(g - a) < \frac{1}{n} \right)$
- 253.** $\left(\forall_{a \in A} a < g \right) \wedge \left(\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{a \in A} (a - g)^2 < \varepsilon \right)$
- 254.** $\left(\forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left(\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{a \in A} (a - g)^2 < \varepsilon \right)$
- 255.** $\left(\forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left(\forall_{\varepsilon < g} \exists_{a \in A} a > \varepsilon \right)$
- 256.** $\left(\forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left(\forall_{\varepsilon < g} \exists_{a \in A} a > g - \varepsilon \right)$
- 257.** $\left(\forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left(\forall_{0 < \varepsilon < 1} \exists_{a \in A} a > g - \varepsilon \right)$
- 258.** $\left(\forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left(\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{a \in A} a \geq g - \varepsilon \right)$
- 259.** $\left(\forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left(\forall_{\varepsilon \geq 0} \exists_{a \in A} a \geq g - \varepsilon \right)$
- 260.** $\left(\forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left(\forall_{\varepsilon \geq 0} \exists_{a \in A} a > g - \varepsilon \right)$
- 261.** $\left(\forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left(\forall_{a \in A} \exists_{b \in A} b \geq \frac{g+a}{2} \right)$
- 262.** $\left(\exists_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left(\forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left(\forall_{a \in A} \exists_{b \in A} b \geq \frac{g+a}{2} \right)$
- 263.** $\left(\exists_{a \in A} a^2 \geq 0 \right) \wedge \left(\forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left(\forall_{a \in A} \exists_{b \in A} b \geq \frac{g+a}{2} \right)$
- 264.** $\left(\exists_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left(\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{a \in A} a > g - \varepsilon \right)$

W każdym z pozostałych zadań podaj kresy zbioru oraz określ, czy kresy należą do zbioru.

$$265. A = \left\{ \frac{3}{n} - \frac{5}{m^2} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$266. B = \left\{ \frac{1}{n^2 - 7} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$267. C = \left\{ x^n : x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{5} \right) \wedge n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$268. D = \left\{ \sqrt{n^2 + 3} - n : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$269. E = \{ \log_2(2n - 1) - \log_2 n : n \in \mathbb{N} \}$$

$$270. F = \left\{ \frac{n}{3n + 7} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$271. G = \left\{ \frac{n}{3n - 7} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$272. H = \left\{ \frac{100^n}{n!} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$273. I = \left\{ \frac{100^n}{(2n)!} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$274. J = \left\{ \frac{mn^2}{m^2 + n^4} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$275. K = \{ |x + y| - |x| - |y| : x, y \in \mathbb{R} \}$$

$$276. L = \left\{ \frac{1}{5^n - 3^m} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$277. M = \left\{ \frac{(\log_2(n^2 + 1)) \cdot \log_3(n^2 + 4)}{(\log_8(n^2 + 4)) \cdot \log_9(n^2 + 1)} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$278. N = \left\{ \sqrt{x^2 + 2x + 1} : -5 \leq x < 3 \right\}$$

$$279. O = \left\{ \frac{1}{x^2 + 2} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$280. P = \left\{ \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$281. Q = \{ x^2 + 4x + 4 : x \in (-6, 1) \}$$

$$282. R = \{ x^2 + 4y + 4 : x, y \in (-6, 1) \}$$

$$283. S = \left\{ \frac{2n^2 + 3n + 5}{2n^2 + 3n + 4} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$284. T = \left\{ \frac{2n^2 + 3n + 5}{2n^2 + 3n + 6} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$285. U = \{ x^2 : x \in (-3, 2) \}$$

$$286. V = \{ x^3 : x \in (-3, 2) \}$$

287. $W = \left\{ \frac{1}{5n-13} : n \in \mathbb{N} \right\}$
288. $X = \left\{ \frac{\sqrt[n]{2}}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$
289. $Y = \{n^2 - 5n : n \in \mathbb{N}\}$
290. $Z = \left\{ \frac{13^n}{n!} : n \in \mathbb{N} \right\}$
291. $A = \left\{ \left(-\frac{1}{2} \right)^n : n \in \mathbb{N} \right\}$
292. $B = \left\{ \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+2} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$
293. $C = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 2m^2 < 3n^2 \right\}$
294. $D = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 2^m > 3^n \right\}$
295. $E = \left\{ \frac{mn}{m^2 + 9n^2} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$
296. $F = \left\{ 7n + \frac{n! + n^{2009} + 1}{n! + n^{2009} + 4} : n \in \mathbb{N} \right\}$
297. $G = \left\{ \frac{m+n}{p} : m, n, p \in \mathbb{N} \wedge m^2 > 2p^2 \wedge n^2 > 3p^2 \right\}$
298. $H = \{x^2 : x \in (-4, 9)\}$
299. $I = \left\{ \frac{n}{2n+3} : n \in \mathbb{N} \right\}$
300. $J = \left\{ \frac{n!}{5^n} : n \in \mathbb{N} \right\}$
301. $K = \left\{ \binom{2008}{n} : n \in \mathbb{N} \wedge n \leq 2008 \right\}$
302. $L = \left\{ \frac{n}{n+m} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$
303. $M = \left\{ \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{3} \right)^2 : n \in \mathbb{N} \right\}$
304. $N = \{ \sqrt{n^2 + 2n} - n : n \in \mathbb{N} \}$
305. $O = \{ \sqrt[n]{3} - \sqrt[m]{2} : m, n \in \mathbb{N} \}$
306. $P = \left\{ \frac{7}{n} - 3m : m, n \in \mathbb{N} \right\}$
307. $Q = \left\{ \frac{m^2 + 4n^2}{mn} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$

308. $R = \left\{ \frac{m^2 + 5n^2}{mn} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$
309. $S = \left\{ \frac{3m^2 + 7n^2}{mn} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$
310. $T = \left\{ \left(\sqrt{37} - 5 \right)^n : n \in \mathbb{N} \right\}$
311. $U = \left\{ \left(\sqrt{37} - 6 \right)^n : n \in \mathbb{N} \right\}$
312. $V = \left\{ \left(\sqrt{37} - 7 \right)^n : n \in \mathbb{N} \right\}$
313. $W = \left\{ \left(\sqrt{37} - 8 \right)^n : n \in \mathbb{N} \right\}$
314. $X = \left\{ \frac{mn}{m^2 + n^2 + 1} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$
315. $Y = \left\{ \frac{5m - 2n}{mn} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$
316. $Z = \left\{ \frac{m}{n + 7} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$
317. $A = \{x^2 : x \in (-2, 1)\}$
318. $B = \{x^3 : x \in (-2, 1)\}$
319. $C = \{3x^2 + y^3 : x, y \in (-2, 1)\}$
320. $D = \{\sqrt{n^2 + n} - n : n \in \mathbb{N}\}$
321. $E = \{\sqrt{n^2 + n + 1} - n : n \in \mathbb{N}\}$
322. $F = \{|2 - \log_2 x| : x \in (1, 8]\}$
323. $G = \{|2 - \log_2 x| : x \in (1, 16]\}$
324. $H = \{|2 - \log_2 x| : x \in (1, 32]\}$
325. $I = \left\{ \frac{1}{3n - 2} + \frac{1}{2m - 3} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$
326. $J = \{\log_2(n + 7) - \log_2 n : n \in \mathbb{N}\}$
327. $K = \left\{ \frac{(n!)^2}{2^{5n}} : n \in \mathbb{N} \right\}$
328. $L = \left\{ \frac{m + n}{\sqrt{mn}} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$
329. $M = \left\{ \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} : n \in \mathbb{N} \right\}$
330. $N = \left\{ \frac{1}{n^2 - 22} : n \in \mathbb{N} \right\}$
331. $O = \left\{ \frac{2n + 1}{3n + 1} : n \in \mathbb{N} \right\}$
332. $P = \left\{ \frac{2n + 1}{3n + 2} : n \in \mathbb{N} \right\}$

$$333. Q = \{x - 2y : x, y \in \mathbb{R} \wedge 16 < x \leq 28 \wedge 3 < y \leq 4\}$$

$$334. R = \{|x - y| : x, y \in \mathbb{R} \wedge 16 < x \leq 28 \wedge 3 < y \leq 4\}$$

$$335. S = \left\{ \frac{1}{7n-30} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$336. T = \left\{ \frac{1}{(7n-30)^2} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$337. U = \left\{ \frac{1}{(7n-30)^3} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$338. V = \left\{ \frac{1}{7m-30} + \frac{1}{(7n-30)^2} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

W kolejnych pięciu zadaniach niech $f_n(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{dla } x < 2 \\ x - n & \text{dla } x \geq 2 \end{cases}$

$$339. A = \{f_2(x) : x \in (-1, 4]\}$$

$$340. B = \{f_3(x) : x \in (-1, 4]\}$$

$$341. C = \{f_4(x) : x \in (-1, 4]\}$$

$$342. D = \{f_5(x) : x \in (-1, 4]\}$$

$$343. E = \{f_6(x) : x \in (-1, 4]\}$$

$$344. A = \left\{ \frac{1}{n+4} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$345. B = \left\{ \frac{1}{n+4} - \frac{1}{m+5} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$346. C = \left\{ \frac{9^n}{n!} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$347. D = \left\{ \frac{(-9)^n}{n!} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$348. E = \left\{ \frac{1}{5n-2011} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$349. F = \{x^2 : x \in (-2, 1)\}$$

$$350. G = \{x^3 : x \in (-2, 1)\}$$

$$351. H = \{x^2 + y^3 : x, y \in (-2, 1)\}$$

$$352. I = \left\{ \frac{1}{x^2+9} : x \in (-2, 1) \right\}$$

$$353. J = \left\{ \frac{1}{x^3+9} : x \in (-2, 1) \right\}$$

$$354. K = \left\{ \frac{1}{x^4+9} : x \in (-2, 1) \right\}$$

$$355. L = \left\{ \frac{1}{10n-43} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

356. $M = \left\{ \frac{1}{(10n-43)^2} : n \in \mathbb{N} \right\}$
357. $N = \left\{ \frac{1}{(10n-43)^2+7} : n \in \mathbb{N} \right\}$
358. $O = \left\{ \frac{(-1)^n}{n^2} : n \in \mathbb{N} \right\}$
359. $P = \left\{ (-1)^n + \frac{(-1)^n}{n^2} : n \in \mathbb{N} \right\}$
360. $Q = \left\{ (-1)^n - \frac{(-1)^n}{n^2} : n \in \mathbb{N} \right\}$
361. $R = \left\{ (-1)^m - \frac{(-1)^n}{n^2} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$
362. $S = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge m^2 \leq 8n^2 \right\}$
363. $T = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge m^2 \leq 9n^2 \right\}$
364. $U = \left\{ \sqrt{x^2-4x+4} : x \in (-3, 5) \right\}$
365. $V = \left\{ \sqrt{x^2-4x+4} : x \in (1, 4) \right\}$
366. $W = \left\{ \frac{1}{n^2-6n+10} : n \in \mathbb{N} \right\}$
367. $X = \left\{ \frac{1}{n^2-6n+7} : n \in \mathbb{N} \right\}$
368. $Y = \left\{ \frac{1}{n^2-6n+4} : n \in \mathbb{N} \right\}$
369. $Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 4^n \leq 8^m \leq 12^n \right\}$
370. $A = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 4^m \leq 8^n \leq 12^m \right\}$
371. $B = \left\{ \frac{m}{n} : 3n^2 \leq m^2 \leq 4n^2 \right\}$
372. $C = \left\{ \frac{m}{n} : 4m^2 \leq n^2 \leq 5m^2 \right\}$
373. $D = \left\{ \frac{m}{n} : 3^n \leq 2^m \leq 4^n \right\}$
374. $E = \left\{ \frac{m}{n} : 4^m \leq 2^n \leq 5^m \right\}$
375. $F = \left\{ \frac{m}{n} : 4^n \leq \left(\frac{m}{n} \right)^m \leq 27^n \right\}$
376. $G = \left\{ \frac{m}{n} : 25n^2 \leq m^2 \leq 27n^2 \right\}$
377. $H = \left\{ \frac{m}{n} : 25n^3 \leq m^3 \leq 27n^3 \right\}$

378. $I = \left\{ \frac{m}{n} : 3^n \leq 8^m \leq 4^n \right\}$
379. $J = \left\{ \frac{m}{n} : 3^n \leq 9^m \leq 4^n \right\}$
380. $K = \left\{ \frac{1}{10n-37} : n \in \mathbb{N} \right\}$
381. $L = \{ \log_2(x+3) : x \in (-1, 5) \}$
382. $M = \{ \log_3(x^2+2) : x \in (-1, 5) \}$
383. $N = \{ 2^{\log_n 3} - 3^{\log_n 2} : n \in \mathbb{N}_2 \}$, $\mathbb{N}_2 = \{2, 3, 4, 5, \dots\}$
384. $O = \left\{ \frac{2^{\log_n 3}}{3^{\log_n 2}} : n \in \mathbb{N}_2 \right\}$
385. $P = \{ 2^{2^{x^2}} : x \in \mathbb{R} \}$
386. $Q = \{ 2^{2^{-x^2}} : x \in \mathbb{R} \}$
387. $R = \{ 2^{2^{x^3}} : x \in \mathbb{R} \}$
388. $A = \{ x^2 + y^2 + z^2 : x, y, z \in (-3, 2] \}$
389. $B = \{ x^2 + y^2 + z^3 : x, y, z \in (-3, 2] \}$
390. $C = \{ x^2 + y^3 + z^3 : x, y, z \in (-3, 2] \}$
391. $D = \{ x^2 - 2x : x \in [0, 4) \}$
392. $E = \{ x^2 - 4x : x \in [0, 4) \}$
393. $F = \{ x^2 - 4y : x, y \in [0, 4) \}$
394. $G = \left\{ \frac{1}{\binom{2013}{n}} : n \in \mathbb{N} \wedge n \leq 2013 \right\}$
395. $H = \left\{ \binom{2013}{n} - \binom{2014}{m} : m, n \in \mathbb{N} \wedge m \leq 2014 \wedge n \leq 2013 \right\}$
396. $I = \left\{ \frac{1}{5n-37} : n \in \mathbb{N} \right\}$
397. $J = \left\{ \frac{1}{(5n-37)^2} : n \in \mathbb{N} \right\}$
398. $K = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 5^3 \cdot n^{15} \leq m^{15} \leq 3^5 \cdot n^{15} \right\}$
399. $L = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 5^2 \cdot n^{10} \leq m^{10} \leq 2^5 \cdot n^{10} \right\}$
400. $M = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 3^2 \cdot n^6 \leq m^6 \leq 2^3 \cdot n^6 \right\}$