

Kolokwium nr 2: 1.12.2014 (pon.), godz. 10:15-11:00 (materiał zad. 1-419, 466-480)

Sprawdzian nr 5: 8.12.2014 (pon.), godz. 10:15-10:35 (materiał zad. 1-450, 466-490)

Sprawdzian nr 6: 15.12.2014 (poniedziałek), godz. 10:15-10:35 (materiał zad. 1-538)

Ćwiczenia 24.11.2014 (poniedziałek): zad. 401-419

Ćwiczenia 28.11.2014 (piątek): zad. 466-480

Ćwiczenia 1.12.2014 (poniedziałek): zad. 420-450

Ćwiczenia 5,12.12.2014 (piątki): zad. 481-490, 499-538

Ćwiczenia 8.12.2014 (poniedziałek): zad. 451-465, 491-498

Szeregi liczbowe.

401. Obliczyć $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{7^k}$, a następnie znaleźć $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

402. Obliczyć sumę szeregu

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-6)^n}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8^n}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{8^n}$

Wskazówka: W kolejnych pięciu zadaniach szukać przykładu szeregu geometrycznego.

403. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2.$$

404. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 5 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} = 2.$$

405. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że dla dowolnej liczby naturalnej k zachodzi równość

$$a_k = 2 \cdot \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n.$$

406. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{1}{4}.$$

407. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{1}{2} \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4 = \frac{1}{5}.$$

408. Dowieść, że $4 < \sum_{n=1}^{127} \frac{1}{n} < 7$.

409. Dowieść, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$ jest zbieżny, a jego suma jest mniejsza od 2.

Kryteria zbieżności szeregów - co każdy student wiedzieć powinien.

1. WARUNEK KONIECZNY ZBIEŻNOŚCI.

Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Innymi słowy, jeżeli ciąg (a_n) jest rozbieżny lub zbieżny do granicy różnej od zera, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

2. ZBIEŻNOŚĆ SZEREGU NIE ZALEŻY OD POMINIĘCIA LUB ZMIANY SKOŃCZENIE WIELU POZOSTAWIONYCH WYRAZÓW.

Oczywiście zmiana lub pominięcie tych wyrazów ma wpływ na sumę szeregu zbieżnego.

3. KRYTERIUM PORÓWNAWCZE.

Niech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ będą szeregami o wyrazach nieujemnych, przy czym dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność $a_n \leq b_n$.

Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, to $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$.

Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.

4. KILKA SZEREGÓW.

$\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ jest zbieżny dla $|q| < 1$, rozbieżny dla pozostałych q .

$\sum_{n=1}^{\infty} n^a$ jest zbieżny dla $a < -1$, rozbieżny dla pozostałych a .

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log a_n}$ jest zbieżny dla $a > 1$, rozbieżny dla pozostałych a . Logarytm ma dowolną podstawę większą od 1.

5. KRYTERIUM D'ALEMBERTA.

Jeżeli (a_n) jest ciągiem o wyrazach niezerowych oraz istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g < 1,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Jeżeli istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g > 1,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

6. ZBIEŻNOŚĆ BEZWZGLĘDNA.

Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

7. SZEREGI NAPRZEMIENNE.

Jeżeli (a_n) jest ciągiem nierosnącym zbieżnym do 0, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(-1)^{n+1}$ jest zbieżny.

Czy istnieje ciąg (a_n) taki, że (podać przykład lub dowieść, że nie istnieje) :

410. $a_n > \frac{1}{n}$ dla nieskończenie wielu n , $\forall_{n \in \mathbb{N}} a_n > 0$, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

411. $a_n = \frac{1}{2^n}$ dla nieskończenie wielu n , $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 10$.

412. $\forall_{n \in \mathbb{N}} a_{n^2} = \frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$.

413. $\forall_{n \in \mathbb{N}} a_n \in \mathbb{Z}$, $a_n = n$ dla $n \leq 100$, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

414. $a_n = 1$ dla nieskończenie wielu n , szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

415. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ i $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ są rozbieżne.

416. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ jest zbieżny.

417. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ jest zbieżny, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

418. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, szereg $\sum_{n=0}^{\infty} (a_{2^n} + a_{2^{n+1}} + a_{2^{n+2}} + \dots + a_{2^{n+1}-1})$ jest zbieżny, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

419. Szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ i $a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n} + a_{2n+1})$ są zbieżne, ale mają różne sumy.

Rozstrzygnąć, czy następujące szeregi są zbieżne

$$\begin{array}{llll}
 \text{420. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} & \text{421. } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} & \text{422. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{n^2+1} & \text{423. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (4n-3)} \\
 \text{424. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2-1}{n^3+6n^2+8n+47} & \text{425. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \cdot 2^{2n-1}} & \text{426. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1} &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
427. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} & 428. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+4)} & 429. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} & 430. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n} \\
431. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{3^n \cdot n!} & 432. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n & 433. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)\sqrt{n+1}} & 434. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}} \\
435. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} & 436. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1} & 437. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4} & 438. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n-n}} & 439. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{n!} \\
440. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{10\sqrt{n!}} & 441. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^{2^n}} & 442. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+\pi}{n^{\pi+e}} & 443. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n+4)(n+9)}} \\
444. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+17}{3^n} & 445. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!+1}}{n!} & 446. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n\sqrt{4^n+3^n}} & 447. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+5\sqrt{n}+27} \\
448. \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^3+64}-\sqrt{n^3+1}) & 449. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9n^4-7n^3+1}{19n^5-13n^2+1} & 450. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9n^4-7n^3+1}{19n^6-13n^2+1}
\end{array}$$

Które z następujących szeregów są bezwzględnie zbieżne, które warunkowo zbieżne, a które rozbieżne:

$$\begin{array}{llll}
451. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} & 452. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 3^n} & 453. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} \\
454. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n+1}{n} & 455. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{10^n}}{3^{2^n}} & 456. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n(n+1)} (-1)^n \\
457. 1-1+1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\dots+1-\frac{1}{k}-\frac{1}{k}-\dots-\frac{1}{k}+\dots \text{ (} k \text{ razy)} \\
458. 1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}-\frac{1}{9}-\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{k}-\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k^2}-\dots-\frac{1}{k^2}+\dots \text{ (} k \text{ razy)} \\
459. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^3}{2^n} & 460. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}} & 461. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{n^2}}{n!} & 462. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n^2}}{(n+3)^{1/4}} \\
463. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) & 464. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1/n}} & 465. \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2}-\sqrt{n}) (-1)^n
\end{array}$$

466. Skonstruować przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach rzeczywistych, że szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^4$ są zbieżne, a ponadto zachodzą równości

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{1}{2} \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4 = \frac{1}{5}.$$

467. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^3 = \frac{7}{2}.$$

468. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = 1.$$

469. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że sumy szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^3, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4$$

są liczbami całkowitymi.

470. Podać przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, że $a_n = 1/4^n$ dla nieskończenie wielu n , a ponadto

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 4.$$

471. Podać przykład takiego ciągu (a_n) , że szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ i $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n} + a_{2n+1})$ są zbieżne, a ponadto

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n}) = 5 \quad \text{oraz} \quad a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n} + a_{2n+1}) = 2.$$

472. Podać przykład takiego ciągu (a_n) , że szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n-2} + a_{3n-1} + a_{3n}), \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n-1} + a_{3n} + a_{3n+1}) \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n} + a_{3n+1} + a_{3n+2})$$

są zbieżne, a ponadto

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n-2} + a_{3n-1} + a_{3n}) = 6, \quad a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n-1} + a_{3n} + a_{3n+1}) = 1$$

oraz

$$a_1 + a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n} + a_{3n+1} + a_{3n+2}) = 3.$$

473. Skonstruować przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n (-1)^n = 1.$$

Wskazówka: Nie istnieje przykład będący czystym szeregiem geometrycznym.

474. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}.$$

475. Podać przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o sumie równej $1/2$, że dla nieskończenie wielu liczb naturalnych n liczba a_n jest całkowita.

476. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3 + (-1)^n)^n}.$$

477. Skonstruować przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right)^2 = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2.$$

Dla skonstruowanego przykładu wyznaczyć wartości sum szeregów występujących w powyższym równaniu i sprawdzić, że jest ono spełnione.

478. Podać przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach nieujemnych i sumie równej 1 , że dla nieskończenie wielu liczb naturalnych n zachodzi równość $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

479. Podać przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o sumie równej 4 , że dla nieskończenie wielu liczb naturalnych n zachodzi równość $a_n = \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$.

480. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 2$ wyraz a_n jest dodatni, a ponadto

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = 13.$$

481. Rozstrzygnąć zbieżność szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{5n^7 + 4n^4 - 1}}{5n^5 - 4n^4 + 1} \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{5n^8 + 4n^4 - 1}}{5n^5 - 4n^4 + 1}.$$

482. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{8n^k + \sqrt{n} - 4}}{8n^4 - 3n^3 + 5}$$

w zależności od parametru naturalnego k .

483. Rozstrzygnąć zbieżność szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^k + 1}}{n^7 + 1} \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^{k+1} + 1}}{n^7 + 1}$$

dla tak dobranej wartości parametru naturalnego k , że dokładnie jeden z tych szeregów jest zbieżny.

484. Podać przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{a_n}{n}}$$

jest rozbieżny.

485. Czy możemy stwierdzić, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest **rozbieżny**, jeżeli wiemy, że

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3}{4}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{7}{4}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{4}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5}{4}$

486. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)! \cdot a^n}{n! \cdot n^{2n}}$$

w zależności od parametru rzeczywistego dodatniego a . Dla jednej wartości a można nie udzielić odpowiedzi.

487. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{3n}{n}}{6^n}.$$

488. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{3n}{n}}{7^n}.$$

489. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^{1000}}{2n^2}.$$

490. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!! \cdot a^n}{n^n}$$

w zależności od parametru rzeczywistego dodatniego a . Dla jednej wartości a można nie udzielić odpowiedzi.

Przypomnienie: $(2n+1)!! = \prod_{i=0}^n (2i+1)$.

491. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (3n-2) \cdot (3n+1)}{(2n+1) \cdot (2n+3) \cdot (2n+5)}.$

492. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (3n-2) \cdot (3n+1)}{(2n-1) \cdot (2n+1) \cdot (2n+3)}.$

493. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (3n-4) \cdot (3n-1)}{n^3 - n}.$

494. Rozstrzygnąć, czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{n^2 + 9900}$$

jest zbieżny.

495. Wśród poniższych sześciu szeregów wskaż szereg zbieżny, a następnie udowodnij jego zbieżność. Jeśli potrafisz, podaj jego sumę.

$$\begin{array}{lll} \text{(A)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{7n+10} & \text{(B)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n^2+1)}{3n^2+n} & \text{(C)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)}{n^2+n} \\ \text{(D)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n^2+1)}{2n^2+1} & \text{(E)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (3n^2+1)}{77n-1} & \text{(F)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)}{2011n+2012} \end{array}$$

496. Dowieść, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n \cdot (n+1)}{(2n+1) \cdot (2n+3) \cdot (2n+5)}$$

jest zbieżny, ale nie jest bezwzględnie zbieżny.

497. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n^7 - 2n + 4) \cdot (-1)^n}{5n^9 - 3n^8 + 1000}.$$

498. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^8 - 2n + 4}{5n^9 - 3n^8 + 1000}.$$

499. Podać przykład takiego ciągu (a_n) , że szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^6$ są zbieżne, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^4$ jest rozbieżny.

500. Czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} n^p$ jest zbieżny dla $p = 3 - \log_2 k$, gdzie

- a) $k = 8$;
- b) $k = 12$;
- c) $k = 16$;
- d) $k = 20$?

501. Czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^p$ jest zbieżny dla $p = 3 - \log_2 k$, gdzie

- a) $k = 8$;
- b) $k = 12$;
- c) $k = 16$;
- d) $k = 20$?

502. Czy podany szereg jest zbieżny

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+3}}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+3}}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}\sqrt[3]{n+3}}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}\sqrt[3]{n+3}}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2+9}}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+9}}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}\sqrt[3]{n^2+9}}$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}\sqrt[3]{n^2+9}}$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n+2}}{\sqrt[3]{n+3}}$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt[3]{n+3}}$

k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt[3]{n^2+9}}{\sqrt{n+2}}$

l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \sqrt[3]{n^2+9}}{\sqrt{n+2}}$

503. W każdym z poniższych 16 pytań w miejscu kropek postaw jedną z liter **Z**, **R**, **N**:

Z - jest **Z**bieżny (tzn. musi być zbieżny)

R - jest **R**ozbieżny (tzn. musi być rozbieżny)

N - może być zbieżny lub rozbieżny (tzn. **N**ie wiadomo, czasem jest zbieżny, a czasem rozbieżny)

Wiadomo, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest rozbieżny, ciąg (c_n) jest zbieżny, ciąg (d_n) jest rozbieżny. Co można wywnioskować o zbieżności

a) ciągu (a_n)

b) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$

c) ciągu (b_n)

d) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$

e) ciągu $(a_n + b_n)$

f) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$

g) ciągu $(c_n + d_n)$

h) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (c_n + d_n)$

i) ciągu $(a_n + c_n)$

j) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + c_n)$

k) ciągu $(a_n + d_n)$

l) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + d_n)$

m) ciągu $(b_n + c_n)$

n) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n + c_n)$

o) ciągu $(b_n + d_n)$

p) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n + d_n)$

W każdym z czterech kolejnych zadań udziel sześciu odpowiedzi **TAK/NIE**.

504. Czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} n^k$ jest zbieżny, jeżeli

a) $k = -3/2$

b) $k = 3/2$

c) $k = -1$

d) $k = 1$

e) $k = -1/2$

f) $k = 1/2$

505. Czy szereg $\sum_{k=1}^{\infty} n^k$ jest zbieżny, jeżeli

a) $n = -3/2$

b) $n = 3/2$

c) $n = -1$

d) $n = 1$

e) $n = -1/2$

f) $n = 1/2$

506. Czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} k^n$ jest zbieżny, jeżeli

a) $k = -3/2$

b) $k = 3/2$

c) $k = -1$

d) $k = 1$

e) $k = -1/2$

f) $k = 1/2$

507. Czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot n^k$ jest zbieżny, jeżeli

a) $k = -3/2$

b) $k = 3/2$

c) $k = -1$

d) $k = 1$

e) $k = -1/2$

f) $k = 1/2$

508. Czy podany szereg jest zbieżny

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{44} - 5)^n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{44} - 6)^n$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{44} - 7)^n$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{44} - 8)^n$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4+1}}$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

k) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

l) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^3}$

W każdym z czterech kolejnych zadań udziel siedmiu **niezależnych** odpowiedzi:
Z - jest **Zbieżny** (tzn. musi być zbieżny, a przy tym szereg spełniający podany warunek istnieje)

R - jest **Rozbieżny** (tzn. musi być rozbieżny, a przy tym szereg spełniający podany warunek istnieje)

N - może być zbieżny lub rozbieżny (tzn. Nie wiadomo, czasem jest zbieżny, a czasem rozbieżny)

X - nie istnieje szereg spełniający podany warunek

Co można wywnioskować o zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, jeżeli wiadomo, że jego wyrazy są różne od zera, a ponadto ciąg jego wyrazów (a_n) spełnia podany warunek

509. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$, gdzie

a) $g = -3$ b) $g = -1$ c) $g = -1/3$

d) $g = 0$ e) $g = 1/3$ f) $g = 1$ g) $g = 3$

510. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g$, gdzie

a) $g = -3$ b) $g = -1$ c) $g = -1/3$

d) $g = 0$ e) $g = 1/3$ f) $g = 1$ g) $g = 3$

511. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = g$, gdzie

a) $g = -3$ b) $g = -1$ c) $g = -1/3$

d) $g = 0$ e) $g = 1/3$ f) $g = 1$ g) $g = 3$

512. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g$, gdzie

a) $g = -3$ b) $g = -1$ c) $g = -1/3$

d) $g = 0$ e) $g = 1/3$ f) $g = 1$ g) $g = 3$

513. Czy podany szereg jest zbieżny

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2+11}{7n^2+13} \cdot (-1)^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n^2+11}{5n^2+13} \cdot (-1)^n$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n}} \cdot (-1)^n$

514. Czy podany szereg jest zbieżny

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2+11}{7n^2+13}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n^2+11}{5n^2+13}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n}}$

515. W każdym z poniższych 9 pytań w miejscu kropek postaw jedną z liter **Z**, **R**, **N**:
Z - jest **Z**bieżny (tzn. musi być zbieżny)
R - jest **R**ozbieżny (tzn. musi być rozbieżny)
N - może być zbieżny lub rozbieżny (tzn. **N**ie wiadomo, czasem jest zbieżny, a czasem rozbieżny)

Wiadomo, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny. Co można wywnioskować o zbieżności szeregu

- | | |
|---|--|
| a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n $ | b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$ |
| c) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$ | d) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1}^2 - a_n^2)$ |
| e) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n - 1 $ | f) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + (-1)^n)$ |
| g) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{a_n}$ | h) $\sum_{n=1}^{\infty} \log_3(a_n^2 + 2)$ |
| i) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + 1}$ | |

516. W każdym z poniższych 6 pytań w miejscu kropek wpisz liczbę rzeczywistą lub postaw jedną z liter **Z**, **R**, **N**:

Liczba S - podany szereg jest zbieżny i jego suma musi być równa **S**

Z - jest **Z**bieżny (tzn. musi być zbieżny), ale na podstawie podanych informacji nie można wyznaczyć jego sumy

R - jest **R**ozbieżny (tzn. musi być rozbieżny)

N - może być zbieżny lub rozbieżny (tzn. **N**ie wiadomo, czasem jest zbieżny, a czasem rozbieżny)

Wiadomo, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, jego suma jest równa 10, a pierwszy wyraz jest równy 3. Co można wywnioskować o zbieżności poniższego szeregu i o jego sumie

- a) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{a_n} =$
- b) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 + a_n) =$
- c) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 \cdot a_n) =$
- d) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n) =$
- e) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1}^2 - a_n^2) =$
- f) $\sum_{n=1}^{\infty} (2^{a_{n+1}} - 2^{a_n}) =$

W każdym z 5 kolejnych zadań udziel czterech **niezależnych** odpowiedzi:

Z - jest **Z**bieżny (tzn. musi być zbieżny)

R - jest **R**ozbieżny (tzn. musi być rozbieżny)

N - może być zbieżny lub rozbieżny (tzn. **N**ie wiadomo, czasem jest zbieżny, a czasem rozbieżny)

517. Ciąg (a_n) liczb rzeczywistych dodatnich jest zbieżny do liczby rzeczywistej g .

Co można wywnioskować o zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, jeżeli wiadomo, że

a) $g = 0$

b) $0 < g < 1$

c) $g = 1$

d) $1 < g$

518. O ciągu (a_n) liczb rzeczywistych dodatnich wiadomo, że ciąg $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ jest zbieżny

do liczby rzeczywistej g . Co można wywnioskować o zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, jeżeli wiadomo, że

a) $g = 0$

b) $0 < g < 1$

c) $g = 1$

d) $1 < g$

519. O ciągu (a_n) liczb rzeczywistych dodatnich wiadomo, że ciąg $\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ jest zbieżny

do liczby rzeczywistej g . Co można wywnioskować o zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, jeżeli wiadomo, że

a) $g = 0$

b) $0 < g < 1$

c) $g = 1$

d) $1 < g$

520. Ciąg (a_n) liczb rzeczywistych dodatnich jest zbieżny do liczby rzeczywistej g .

Co można wywnioskować o zbieżności ciągu $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$, jeżeli wiadomo, że

a) $g = 0$

b) $0 < g < 1$

c) $g = 1$

d) $1 < g$

521. O ciągu (a_n) liczb rzeczywistych wiadomo, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny i jego

sumą jest liczba rzeczywista g . Co można wywnioskować o zbieżności ciągu (a_n) , jeżeli wiadomo, że

a) $g = 0$

b) $0 < g < 1$

c) $g = 1$

d) $1 < g$

W każdym z poniższych 17 zadań w miejscu kropek wpisz liczbę rzeczywistą lub postaw jedną z liter **Z**, **R**, **N**:

Liczba S - podany szereg jest zbieżny i jego suma musi być równa **S**

Z - jest **Z**bieżny (tzn. musi być zbieżny), ale na podstawie podanych informacji nie można wyznaczyć jego sumy

R - jest **R**ozbieżny (tzn. musi być rozbieżny)

$\mathbf{N}$ - może być zbieżny lub rozbieżny (tzn. $\mathbf{N}$ nie wiadomo, czasem jest zbieżny, a czasem rozbieżny)

Wiadomo, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, jego suma jest równa 50, a pierwszy wyraz jest równy 4. Co można wywnioskować o zbieżności poniższego szeregu i o jego sumie

$$522. \sum_{n=1}^{\infty} 2a_n = \dots\dots\dots$$

$$523. \sum_{n=1}^{\infty} (2 + a_n) = \dots\dots\dots$$

$$524. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2} = \dots\dots\dots$$

$$525. \sum_{n=1}^{\infty} (-2a_n) = \dots\dots\dots$$

$$526. \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \dots\dots\dots$$

$$527. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = \dots\dots\dots$$

$$528. \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} = \dots\dots\dots$$

$$529. \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+2} = \dots\dots\dots$$

$$530. \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = \dots\dots\dots$$

$$531. \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1}) = \dots\dots\dots$$

$$532. \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - a_{n+1}^2) = \dots\dots\dots$$

$$533. \sum_{n=1}^{\infty} 3^{a_n} = \dots\dots\dots$$

$$534. \sum_{n=1}^{\infty} (2^{a_n} - 2^{a_{n+1}}) = \dots\dots\dots$$

$$535. \sum_{n=1}^{\infty} (3^{a_n} - 3^{a_{n+1}}) = \dots\dots\dots$$

$$536. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + 9} = \dots\dots\dots$$

$$537. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{a_n^2 + 9} - \sqrt{a_{n+1}^2 + 9} \right) = \dots\dots\dots$$

$$538. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_n - a_{n+1}) \cdot (a_n + a_{n+1})}{\sqrt{a_n^2 + 9} + \sqrt{a_{n+1}^2 + 9}} = \dots\dots\dots$$