

Kolokwium nr 3: 22.12.2014 (pn.), godz. 10:15-11:00 (materiał zad. 1-559, 616-627)
 Sprawdzian nr 7: 12.01.2015 (pn.), godz. 10:15-10:35 (materiał zad. 1-584, 616-658)
 Sprawdzian nr 8: 19.01.2015 (poniedziałek), godz. 10:15-10:35 (materiał zad. 1-700)

Ćwiczenia 15.12.2014 (poniedziałek): zad. 539-553

Konwersatorium (nr 5) 16.12.2014 (wtorek): zad. 554-559

Ćwiczenia 19.12.2014 (piątek): zad. 616-627

Ćwiczenia 22.12.2014 (poniedziałek): zad. 566-587

Konwersatorium (nr 6) 7.01.2014 (środowtorek): zad. 560-565

Ćwiczenia 9.01.2015 (piątek): zad. 628-665

Ćwiczenia 12.01.2015 (poniedziałek): zad. 588-615

Ćwiczenia 16.01.2015 (piątek): zad. 666-700

Funkcje. Ciągłość. Granica funkcji w punkcie.

Wskazać taką liczbę M , że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność

$$|f(x)| \leq M.$$

$$539. f(x) = \frac{2x^4 + 13x^2 + 7}{5x^4 + x^2 + 2} \quad 540. f(x) = \frac{5x^4 + x^2 + 2}{2x^4 + 13x^2 + 7} \quad 541. f(x) = e^{\sin x}$$

542. Wskazać odpowiednie liczby wymierne dodatnie C oraz δ , a następnie udowodnić, że

$$\forall_{x \in (27-\delta, 27+\delta)} \left| \sqrt[3]{x} - C \right| < \frac{1}{1000}.$$

Do podanych f , x_0 i ε dobrać takie δ , aby

$$\forall_{x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)} |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$543. f(x) = 2x, x_0 = 5, \varepsilon = 1/10 \quad 544. f(x) = 1/x, x_0 = 4, \varepsilon = 1/100$$

$$545. f(x) = x^2, x_0 = 1, \varepsilon = 1/50 \quad 546. f(x) = x^3, x_0 = 0, \varepsilon = 1/1000$$

$$547. f(x) = \sqrt{x}, x_0 = 30, \varepsilon = 1/10 \quad 548. f(x) = x^4, x_0 = 10, \varepsilon = 10^{-10}$$

549. Wskazać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C , a następnie udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq C \cdot |x - y|,$$

gdzie $f(x) = \sqrt{x^2 + 2011}$.

Dla podanej funkcji f wyprowadzić oszacowanie postaci

$$|f(x) - f(x_0)| < C \cdot \delta$$

prawdziwe dla dowolnego $\delta > 0$ oraz dowolnych $x, x_0 \in D_f$ spełniających warunek $|x - x_0| < \delta$.

$$550. f(x) = \sqrt{x}, D_f = [1, +\infty) \quad 551. f(x) = \sqrt{x^2 + 1}, D_f = \mathbb{R}$$

$$552. f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, D_f = \mathbb{R} \quad 553. f(x) = x^3, D_f = [-10, 5]$$

Do podanych f , x_0 i ε dobrać takie $k \in \mathbb{N}$ (dowolne, nie musi być najmniejsze), aby przy $\delta = 10^{-k}$ spełniony był warunek

$$\forall_{x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)} |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

554. $f(x) = x^{10}$, $x_0 = 2$, $\varepsilon = 1/10$ **555.** $f(x) = x^{100}$, $x_0 = 5$, $\varepsilon = 10^{-10}$

556. $f(x) = x^{1000}$, $x_0 = 10$, $\varepsilon = 10^{100}$ (tak, do **plus** setnej)

557. $f(x) = x^{1/10}$, $x_0 = 1111$, $\varepsilon = 10^{-5}$

Wskazać taką liczbę M , że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność

$$|f(x)| \leq M.$$

558. $f(x) = \frac{x}{x^4 + 3}$ **559.** $f(x) = \frac{x^{1000}}{2^{|x|}}$

OSZUSTWO 560. (przykład funkcji nieciągłej): Funkcja $f(x) = x^2$ jest nieciągła.

Dowód: Przeprowadzimy dowód nie wprost. Zakładając, że funkcja f jest ciągła, weźmy w definicji Cauchy'ego ciągłości $\varepsilon = 1$. Wtedy istnieje takie $\delta > 0$, że dla y spełniających nierówność $|y - x| < \delta$ zachodzi $|x^2 - y^2| < 1$.

Jednak ta ostatnia nierówność nie zawsze jest prawdziwa, gdyż dla $x > \frac{1}{\delta}$ i $y = x + \frac{\delta}{2}$ otrzymujemy $|x^2 - y^2| = x\delta + \frac{\delta^2}{4} > 1$.

□

OSZUSTWO 561. Niech $f, g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ będą takimi funkcjami ciągłymi, że $f(0) = 5$, $f(1) = 7$, $g(0) = 8$, $g(1) = 4$. Wtedy istnieje takie $c \in (0, 1)$, że $f(c) = g(c)$.

Dowód: Z własności Darboux funkcji ciągłych zastosowanej do funkcji f wynika, że dla pewnego $c \in (0, 1)$ mamy $f(c) = 6$. Podobnie, stosując własność Darboux do funkcji g otrzymujemy $g(c) = 6$. A zatem $f(c) = g(c)$, co należało dowieść. □

Wskazać błąd w powyższym rozumowaniu i podać poprawny dowód.

562. Dowieść, że równanie

$$x^{1000000} + 2 = (1,000001)^x$$

ma co najmniej jedno rozwiązanie rzeczywiste. Wskazać konkretny (być może niepotrzebnie duży) przedział, w którym znajduje się rozwiązanie.

563. Dla których liczb

$$n \in \{2, 4, 10, 20, 50, 100, 200, 500, 1000, 10^5, 10^{10}, 10^{30}, 10^{100}, 10^{1000}\}$$

wykres funkcji

$$f(x) = 2^x$$

przecina wykres funkcji

$$g(x) = x^n + 4,$$

jeżeli za jednostkę na osiach przyjmiemy 1 cm. Przyjąć promień wszechświata równy 10^{28} cm. Punkty przecięcia wykresów leżące w innych wszechświatach nas nie interesują.

Jak zmieni się odpowiedź, gdy wykonamy rysunek biorąc za jednostkę na osiach średnicę atomu (10^{-8} cm) lub średnicę jądra atomowego (10^{-13} cm)?

564. Dowieść, że równanie $x^2 = 25\pi^2 \cdot \cos x$ ma co najmniej 10 rozwiązań rzeczywistych.

565. Dowieść, że równanie $x^2 = 25\pi^2 \cdot \cos(x^3)$ ma więcej niż 1000 rozwiązań rzeczywistych.

Obliczyć następujące granice:

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{566.} \lim_{x \rightarrow 7} \left(\frac{1}{x-7} - \frac{8}{x^2-6x-7} \right) \quad \mathbf{567.} \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} \quad \mathbf{568.} \lim_{x \rightarrow 0} e^{-1/x^2} \\
 & \mathbf{569.} \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8} \quad \mathbf{570.} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x+2} \quad \mathbf{571.} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-6x+5}{x-5} \\
 & \mathbf{572.} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) \quad \mathbf{573.} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2008}-1}{x^{10}-1} \quad \mathbf{574.} \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1} \\
 & \mathbf{575.} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6} \quad \mathbf{576.} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \quad \mathbf{577.} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1} \\
 & \mathbf{578.} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} \quad \mathbf{579.} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \quad \mathbf{580.} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \quad \mathbf{581.} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{1+\ln x} \\
 & \mathbf{582.} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{2^{1/x}+1}{2^{1/x}-1} \quad \mathbf{583.} \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{2^{1/x}+1}{2^{1/x}-1} \quad \mathbf{584.} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{1/x}-1}{2^{1/x}+1}
 \end{aligned}$$

Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{585.} f(x) = \sqrt{x^2+x+1} + \frac{x}{2} \quad \mathbf{586.} f(x) = \sqrt[3]{x^3+x^2} \quad \mathbf{587.} f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+5x+4} + |x| \\
 & \mathbf{588.} f(x) = \log_4(2^x+8^x) \quad \mathbf{589.} f(x) = \log_2(2^{2x}-2^{4x+1}+2^{6x})
 \end{aligned}$$

590. Dla których wartości parametrów a, b funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & \text{dla } x < 1 \\ x^2 & \text{dla } 1 \leq x < 2 \\ ax-b & \text{dla } 2 \leq x \end{cases}$$

jest ciągła? Naszkicować wykres funkcji f dla każdej pary parametrów (a,b) , dla których funkcja f jest ciągła.

591. Dla których wartości parametrów a, b funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x < 1 \\ x^2+ax+b & \text{dla } 1 \leq x < 2 \\ x+3 & \text{dla } 2 \leq x \end{cases}$$

jest ciągła? Naszkicować wykres funkcji f dla każdej pary parametrów (a,b) , dla których funkcja f jest ciągła.

Twierdzenie o trzech funkcjach: Jeżeli funkcje f, g, h są określone w otoczeniu punktu $x_0 \in [-\infty, +\infty]$ (mogą nie być określone w samym x_0), a przy tym

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

dla x bliskich x_0 , to z istnienia i równości granic funkcji f oraz h w punkcie x_0 wynika

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x).$$

To samo stosuje się do granic jednostronnych.

Obliczyć granice

$$592. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x^{1000})}{\sqrt{x}} \quad 593. \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \left\{1/x^{1000}\right\} \text{ (uwaga: część ułamkowa)}$$

Korzystając ze zbieżności

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

obliczyć

$$\begin{aligned} 594. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x^2+x}} & \quad 595. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{7x^2+5x+1}} \\ 596. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{x+1}}{(x+1)^x} & \quad 597. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}} \quad 598. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^x \\ 599. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x \cdot f(x)} & \text{, gdzie } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \\ 600. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{(x+1)^x} & \quad 601. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{(x+1)^{x+1}} \end{aligned}$$

Wyznaczyć wartości granic ciągów.

$$\begin{aligned} 602. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right) & \quad 603. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+2010}\right) \quad 604. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2010n+1}\right) \\ 605. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2010} & \quad 606. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+2010}\right)^{2010} \quad 607. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2010n+1}\right)^{2010} \\ 608. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n & \quad 609. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2010n} \quad 610. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n/2010} \\ 611. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^{2010}} & \quad 612. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n \quad 613. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \\ 614. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{7}{n}\right)^n & \quad 615. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{n}\right)^n \end{aligned}$$

616. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej x zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{8x+7}{5x+\sqrt{x}+8} \leq 6 \cdot C.$$

617. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{18x^6+19x^4+20}{21x^6+20x^2+19} \leq 10 \cdot C.$$

618. Wybrać odpowiednią liczbę całkowitą N i udowodnić, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność

$$\frac{3^x+4^x+9^x}{3^x+8^x+9^x} \leq N$$

oraz wykazać istnienie takiej liczby rzeczywistej x , że

$$\frac{3^x+4^x+9^x}{3^x+8^x+9^x} > N-1.$$

619. Niech funkcja $f : [25, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = \sqrt{x}$.

Zdanie Z: Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [25, \infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq C \cdot |x - y|.$$

a) Dowieść, że **zdanie Z** jest prawdziwe dla $C = 1/10$.

b) Dowieść, że **zdanie Z** jest fałszywe dla $C = 1/12$.

620. Dana jest funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \sqrt[4]{x^2 + 16}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{4}.$$

621. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|,$$

gdzie $f(x) = \sqrt{x^2 + 37}$.

622. Niech funkcja $f : [8, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = \frac{1}{x}$.

Zdanie Z: Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [8, \infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq C \cdot |x - y|.$$

a) Dowieść, że **zdanie Z** jest prawdziwe dla $C = 1/60$.

b) Dowieść, że **zdanie Z** jest fałszywe dla $C = 1/80$.

623. Dla funkcji $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ określonej podanym wzorem wskazać odpowiednie liczby rzeczywiste dodatnie x, y i udowodnić nierówność

$$|f(x) - f(y)| > 100 \cdot |x - y|.$$

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = \frac{1}{x}$

624. Dana jest funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \sqrt[4]{x^4 + 1}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|.$$

625. Dana jest funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \sqrt[4]{x^2 + 1}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{2}.$$

626. Dana jest funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \sqrt[8]{x^4 + 1}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{2}.$$

627. Dana jest funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \sqrt[8]{x^2 + 10^8}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{4000}.$$

628. Podać wartości granic

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = \dots\dots\dots$

c) $\lim_{x \rightarrow -1/\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x = \dots\dots\dots$

e) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \operatorname{arctg} x = \dots\dots\dots$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \operatorname{arctg} x = \dots\dots\dots$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{arctg} x = \dots\dots\dots$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \dots\dots\dots$

629. Podać wartości granic

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_{(\sqrt{37}-5)} x = \dots\dots\dots$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \log_{(\sqrt{37}-5)} x = \dots\dots\dots$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_{(\sqrt{37}-5)} x = \dots\dots\dots$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_{(\sqrt{37}-6)} x = \dots\dots\dots$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \log_{(\sqrt{37}-6)} x = \dots\dots\dots$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_{(\sqrt{37}-6)} x = \dots\dots\dots$

W każdym z 18 poniższych zadań podaj wartość granicy ciągu (liczba rzeczywista) lub granicy niewłaściwej ($+\infty$ lub $-\infty$).

Wpisz literkę **R**, jeśli granica nie istnieje (tzn. gdy ciąg występujący pod znakiem granicy jest rozbieżny, ale nie jest to rozbieżność do $+\infty$ ani do $-\infty$).

630. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2(n+8)}{\log_2 n} = \dots\dots\dots$

631. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\log_2(n+8) - \log_2 n) = \dots\dots\dots$

632. $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_n(n+8) = \dots\dots\dots$

633. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2(8n+1)}{\log_2 n} = \dots\dots\dots$

634. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\log_2(8n+1) - \log_2 n) = \dots\dots\dots$

635. $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_n(8n+1) = \dots\dots\dots$

636. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2(n^8+1)}{\log_2 n} = \dots\dots\dots$

637. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\log_2(n^8+1) - \log_2 n) = \dots\dots\dots$

638. $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_n(n^8+1) = \dots\dots\dots$

639. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_3(n+9)}{\log_3 n} = \dots\dots\dots$

640. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\log_3(n+9) - \log_3 n) = \dots\dots\dots$

641. $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_n(n+9) = \dots\dots\dots$

642. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_3(9n+1)}{\log_3 n} = \dots\dots\dots$

643. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\log_3(9n+1) - \log_3 n) = \dots\dots\dots$

644. $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_n(9n+1) = \dots\dots\dots$

645. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_3(n^9+1)}{\log_3 n} = \dots\dots\dots$

$$646. \lim_{n \rightarrow \infty} (\log_3(n^9 + 1) - \log_3 n) = \dots\dots\dots$$

$$647. \lim_{n \rightarrow \infty} \log_n(n^9 + 1) = \dots\dots\dots$$

W każdym z poniższych 11 zadań podaj wartość granicy funkcji lub granicy niewłaściwej $+\infty = \infty$ albo $-\infty$.

$$648. \lim_{x \rightarrow 0^+} \log(\sqrt{17}-3)x = \dots\dots\dots$$

$$649. \lim_{x \rightarrow 0^+} \log(\sqrt{13}-3)x = \dots\dots\dots$$

$$650. \lim_{x \rightarrow +\infty} \log(\sqrt{17}-3)x = \dots\dots\dots$$

$$651. \lim_{x \rightarrow +\infty} \log(\sqrt{13}-3)x = \dots\dots\dots$$

$$652. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{17}-3)^x = \dots\dots\dots$$

$$653. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{13}-3)^x = \dots\dots\dots$$

$$654. \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{17}-3)^x = \dots\dots\dots$$

$$655. \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{13}-3)^x = \dots\dots\dots$$

$$656. \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} 2x = \dots\dots\dots$$

$$657. \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg}(\sqrt{17}-4)x = \dots\dots\dots$$

$$658. \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg}(\sqrt{13}-4)x = \dots\dots\dots$$

659. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = a\{x\}^3 + b\{x\}^2 + c\{x\} + d,$$

gdzie $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x .

W każdym z podpunktów uzupełnij brakującą liczbę tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczba o żądanej własności nie istnieje.

a) $a = \dots\dots\dots$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$

b) $a = 1$, $b = \dots\dots\dots$, $c = 3$, $d = 4$

c) $a = 1$, $b = 2$, $c = \dots\dots\dots$, $d = 4$

d) $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = \dots\dots\dots$

660. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = a \cdot A^{\{x\}} - b \cdot B^{\{x\}},$$

gdzie $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x , a wyrażenia $\{x\}$ występują w wykładnikach potęg.

W każdym z podpunktów uzupełnij brakującą liczbę rzeczywistą dodatnią tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczba rzeczywista dodatnia o żądanej własności nie istnieje.

a) $a = \dots\dots\dots$, $A = 6$, $b = 5$, $B = 5$

- b) $a=2$, $A=.....$, $b=3$, $B=5$
 c) $a=2$, $A=6$, $b=.....$, $B=3$
 d) $a=2$, $A=4$, $b=3$, $B=.....$

661. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{dla } x < 0 \\ dx + e & \text{dla } 0 \leq x < 1 \\ ax^2 + bx + c & \text{dla } 1 \leq x \end{cases}$$

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

- a) $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=.....$, $e=.....$
 b) $a=1$, $b=2$, $c=.....$, $d=4$, $e=.....$
 c) $a=1$, $b=.....$, $c=.....$, $d=4$, $e=5$
 d) $a=.....$, $b=7$, $c=8$, $d=9$, $e=.....$
 e) $a=6$, $b=7$, $c=.....$, $d=.....$, $e=10$
 f) $a=6$, $b=.....$, $c=8$, $d=9$, $e=.....$

662. Czy funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = [x + \log_2 a] - [x]$ jest ciągła, jeżeli

- a) $a=1$ b) $a=2$
 c) $a=6$ d) $a=8$

663. Czy funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = [x + a] - [x + b]$ jest ciągła, jeżeli

- a) $a=1/2$, $b=3/2$ b) $a=1/3$, $b=-2/3$
 c) $a=1/4$, $b=3/4$ d) $a=1/5$, $b=-9/5$

664. Czy funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} |x^2 - 25| & \text{dla } x < a \\ 24 & \text{dla } a \leq x < b \\ |x^2 - 25| & \text{dla } b \leq x \end{cases}$$

jest ciągła, jeżeli

- a) $a=-7$, $b=-5$ b) $a=-7$, $b=-1$
 c) $a=-5$, $b=-3$ d) $a=-5$, $b=-1$
 e) $a=-3$, $b=-1$ f) $a=-3$, $b=1$
 g) $a=-1$, $b=1$ h) $a=-1$, $b=3$

665. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = a \cdot \{2x\} + b \cdot \{2x\}^2 + c \cdot \{x\},$$

gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y .

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

- a) $a=1$, $b=.....$, $c=.....$
 b) $a=.....$, $b=2$, $c=.....$
 c) $a=.....$, $b=.....$, $c=3$
 d) $a=2$, $b=.....$, $c=.....$

e) $a = \dots, b = 3, c = \dots$ f) $a = \dots, b = \dots, c = 5$ **666.** Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = a \cdot \{2x\} + b \cdot \{2x+1\} + c \cdot \{x\} + d \cdot \left\{x + \frac{1}{2}\right\},$$

gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y .

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

a) $a = 1, b = 2, c = \dots, d = \dots$ b) $a = \dots, b = 2, c = 3, d = \dots$ c) $a = \dots, b = \dots, c = 3, d = 4$ d) $a = 2, b = 3, c = \dots, d = \dots$ e) $a = \dots, b = 3, c = 6, d = \dots$ f) $a = \dots, b = \dots, c = 6, d = 6$

667. Podać wszystkie trzy pary parametrów (a, b) , dla których funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x < a \\ x^3 & \text{dla } a \leq x < b \\ x & \text{dla } b \leq x \end{cases}$$

jest ciągła.

668. Podać wszystkie sześć par parametrów (a, b) , dla których funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 6 & \text{dla } x < a \\ |x^2 - 10x + 15| & \text{dla } a \leq x < b \\ 6 & \text{dla } b \leq x \end{cases}$$

jest ciągła.

669. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = a \cdot \{x\} + b \cdot 3^{\{x\}},$$

gdzie $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x , a w drugim składniku wyrażenie $\{x\}$ występuje **w wykładniku potęgi** o podstawie 3.

Wyznaczyć wszystkie pary parametrów rzeczywistych (a, b) , dla których funkcja f określona powyższym wzorem jest ciągła.

670. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = a \cdot \{2x\} + b \cdot \{x\} + c \cdot \left\{x + \frac{1}{2}\right\},$$

gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y .

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

a) $a = 1, b = \dots, c = \dots$ b) $a = \dots, b = 2, c = \dots$

c) $a = \dots\dots\dots$, $b = \dots\dots\dots$, $c = 3$

d) $a = 4$, $b = \dots\dots\dots$, $c = \dots\dots\dots$

e) $a = \dots\dots\dots$, $b = 5$, $c = \dots\dots\dots$

f) $a = \dots\dots\dots$, $b = \dots\dots\dots$, $c = 6$

W każdym z pięciu poniższych zadań podaj takie liczby rzeczywiste $a < b$, aby funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona podanym wzorem była ciągła.

$$671. f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x < a \\ 1 & \text{dla } a \leq x < b \\ x^2 & \text{dla } b \leq x \end{cases} \quad a = \dots\dots\dots, \quad b = \dots\dots\dots$$

$$672. f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x < a \\ x & \text{dla } a \leq x < b \\ x^2 & \text{dla } b \leq x \end{cases} \quad a = \dots\dots\dots, \quad b = \dots\dots\dots$$

$$673. f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x < a \\ x+2 & \text{dla } a \leq x < b \\ x^2 & \text{dla } b \leq x \end{cases} \quad a = \dots\dots\dots, \quad b = \dots\dots\dots$$

$$674. f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x < a \\ x+6 & \text{dla } a \leq x < b \\ x^2 & \text{dla } b \leq x \end{cases} \quad a = \dots\dots\dots, \quad b = \dots\dots\dots$$

$$675. f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x < a \\ 2x & \text{dla } a \leq x < b \\ x^2 & \text{dla } b \leq x \end{cases} \quad a = \dots\dots\dots, \quad b = \dots\dots\dots$$

W każdym z siedmiu poniższych zadań podaj wartość granicy funkcji (liczba rzeczywista) lub granicy niewłaściwej ($+\infty$ lub $-\infty$).

Wpisz literkę **R**, jeśli nie istnieje granica ani granica niewłaściwa.

$$676. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x+2} = \dots\dots\dots$$

$$677. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{3x+2}} = \dots\dots\dots$$

$$678. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{3x^2+2}} = \dots\dots\dots$$

$$679. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{3x^3+2}} = \dots\dots\dots$$

$$680. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{3x^2}\right)^x = \dots\dots\dots$$

$$681. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{3x^2}\right)^{x^2} = \dots\dots\dots$$

$$682. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{3x^2}\right)^{x^3} = \dots\dots\dots$$

W każdym z osiemnastu poniższych zadań podaj wartość granicy funkcji (liczba rzeczywista) lub granicy niewłaściwej ($+\infty$ lub $-\infty$).

Wpisz literkę **R**, jeśli nie istnieje granica ani granica niewłaściwa.

Przypomnienie: Zapis $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y .

683. $\lim_{x \rightarrow 16^-} \{\log_4 x\} = \dots\dots\dots$

684. $\lim_{x \rightarrow 16^+} \{\log_4 x\} = \dots\dots\dots$

685. $\lim_{x \rightarrow 16^-} \{\log_8 x\} = \dots\dots\dots$

686. $\lim_{x \rightarrow 16^+} \{\log_8 x\} = \dots\dots\dots$

687. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = \dots\dots\dots$

688. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x = \dots\dots\dots$

689. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^x}\right)^{(x+4)^x} = \dots\dots\dots$

690. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^x}\right)^{(x+27)^x} = \dots\dots\dots$

691. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^x}\right)^{(x+256)^x} = \dots\dots\dots$

692. $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt[3]{x} - 4}{x - 64} = \dots\dots\dots$

693. $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{x - 64}{\sqrt{x} - 8} = \dots\dots\dots$

694. $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt[3]{x} - 4}{\sqrt{x} - 8} = \dots\dots\dots$

695. $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2^{2^{1/x}} = \dots\dots\dots$

696. $\lim_{x \rightarrow 0^-} 2^{2^{1/x}} = \dots\dots\dots$

697. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{2^{1/x}} = \dots\dots\dots$

698. $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2^{2^{2^{1/x}}} = \dots\dots\dots$

699. $\lim_{x \rightarrow 0^-} 2^{2^{2^{1/x}}} = \dots\dots\dots$

700. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{2^{2^{1/x}}} = \dots\dots\dots$