

616. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej x zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{8x+7}{5x+\sqrt{x}+8} \leq 6 \cdot C.$$

Rozwiązanie:

W przypadku, gdy $x \geq 1$, wykonujemy następujące szacowania:

$$\frac{4}{7} = \frac{8}{14} = \frac{8x+0}{5x+x+8x} \leq \frac{8x+7}{5x+\sqrt{x}+8} \leq \frac{8x+7x}{5x+0+0} = \frac{15}{5} = 3.$$

Natomiast w przypadku, gdy $0 < x < 1$, oszacowania wyglądają następująco:

$$\frac{1}{2} = \frac{7}{14} = \frac{0+7}{5+1+8} \leq \frac{8x+7}{5x+\sqrt{x}+8} \leq \frac{8+7}{0+0+8} = \frac{15}{8}.$$

Zauważamy, że

$$\frac{1}{2} < \frac{4}{7}$$

oraz

$$\frac{15}{8} < 3.$$

Zatem dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej x zachodzą nierówności

$$\frac{1}{2} \leq \frac{8x+7}{5x+\sqrt{x}+8} \leq 3,$$

można więc przyjąć $C = 1/2$.

617. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{18x^6+19x^4+20}{21x^6+20x^2+19} \leq 10 \cdot C.$$

Rozwiązanie:

W przypadku, gdy $|x| \geq 1$, wykonujemy następujące szacowania:

$$\frac{3}{10} = \frac{18}{60} = \frac{18x^6+0+0}{21x^6+20x^6+19x^6} \leq \frac{18x^6+19x^4+20}{21x^6+20x^2+19} \leq \frac{18x^6+19x^6+20x^6}{21x^6+0+0} = \frac{57}{21} = \frac{19}{7}.$$

Natomiast w przypadku, gdy $|x| < 1$, oszacowania wyglądają następująco:

$$\frac{1}{3} = \frac{0+0+20}{21+20+19} \leq \frac{18x^6+19x^4+20}{21x^6+20x^2+19} \leq \frac{18+19+20}{0+0+19} = 3.$$

Zauważamy, że

$$\frac{3}{10} < \frac{1}{3}$$

oraz

$$\frac{19}{7} < 3.$$

Zatem dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzą nierówności

$$\frac{3}{10} \leq \frac{18x^6+19x^4+20}{21x^6+20x^2+19} \leq 3,$$

można więc przyjąć $C = 3/10$.

618. Wybrać odpowiednią liczbę całkowitą N i udowodnić, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność

$$\frac{3^x + 4^x + 9^x}{3^x + 8^x + 9^x} \leq N$$

oraz wykazać istnienie takiej liczby rzeczywistej x , że

$$\frac{3^x + 4^x + 9^x}{3^x + 8^x + 9^x} > N - 1.$$

Rozwiązanie:

Rozpatrzmy dwa przypadki.

1° Dla $x \geq 0$ zachodzi nierówność $4^x \leq 8^x$, skąd

$$3^x + 4^x + 9^x \leq 3^x + 8^x + 9^x,$$

czyli

$$\frac{3^x + 4^x + 9^x}{3^x + 8^x + 9^x} \leq 1.$$

2° Niech teraz $x < 0$. Wówczas $4^x > 8^x$, skąd

$$3^x + 4^x + 9^x > 3^x + 8^x + 9^x,$$

czyli

$$\frac{3^x + 4^x + 9^x}{3^x + 8^x + 9^x} > 1.$$

Ponadto korzystając z nierówności $4^x < 3^x$ dla $x < 0$ otrzymujemy

$$\frac{3^x + 4^x + 9^x}{3^x + 8^x + 9^x} < \frac{3^x + 3^x + 9^x}{3^x + 0 + 9^x} < \frac{3^x + 3^x + 9^x + 9^x}{3^x + 9^x} = 2.$$

Wykazaliśmy więc, że

$$\frac{3^x + 4^x + 9^x}{3^x + 8^x + 9^x} \leq 1 < 2 \quad \text{dla} \quad x \geq 0$$

oraz

$$1 < \frac{3^x + 4^x + 9^x}{3^x + 8^x + 9^x} < 2 \quad \text{dla} \quad x < 0.$$

Odpowiedź: Warunki zadania są spełnione przez liczbę $N = 2$.

619. Niech funkcja $f: [25, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = \sqrt{x}$.

Zdanie Z: Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [25, \infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq C \cdot |x - y|.$$

a) Dowieść, że **zdanie Z** jest prawdziwe dla $C = 1/10$.

Rozwiązanie:

Przekształcamy i szacujemy lewą stronę dowodzonej nierówności korzystając z nierówności $x, y \geq 25$:

$$|f(x) - f(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \frac{|x - y|}{\sqrt{25} + \sqrt{25}} = \frac{|x - y|}{5 + 5} = \frac{|x - y|}{10},$$

co stanowi dowód danej w treści zadania nierówności dla $C = 1/10$ i dowolnych $x, y \geq 25$.

b) Dowieść, że **zdanie Z** jest fałszywe dla $C = 1/12$.

Rozwiązanie:

Dla $x = 25$ oraz $y = 36$ mamy $|x - y| = 11$ oraz

$$|f(x) - f(y)| = 1 = \frac{|x - y|}{11} > \frac{|x - y|}{12},$$

wskazaliśmy więc przykład liczb $x, y \geq 25$, dla których dana w treści zadania nierówność jest fałszywa przy $C = 1/12$.

Nie jest więc prawdą, że ta nierówność zachodzi dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [25, \infty)$.

620. Dana jest funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \sqrt[4]{x^2 + 16}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{4}.$$

Rozwiązanie:

Skorzystamy ze wzoru skróconego mnożenia

$$a^4 - b^4 = (a^2 - b^2) \cdot (a^2 + b^2) = (a - b) \cdot (a + b) \cdot (a^2 + b^2),$$

który przy założeniu $a + b \neq 0$ można zapisać w postaci

$$a - b = \frac{a^4 - b^4}{(a + b) \cdot (a^2 + b^2)}.$$

Przyjmując $a = \sqrt[4]{x^2 + 16}$ oraz $b = \sqrt[4]{y^2 + 16}$, zauważamy, że $a + b > 0$ i przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \sqrt[4]{x^2 + 16} - \sqrt[4]{y^2 + 16} \right| = \\ &= \left| \frac{(x^2 + 16) - (y^2 + 16)}{\left(\sqrt[4]{x^2 + 16} + \sqrt[4]{y^2 + 16} \right) \cdot \left(\sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{y^2 + 16} \right)} \right| = \\ &= \frac{|x^2 - y^2|}{\left(\sqrt[4]{x^2 + 16} + \sqrt[4]{y^2 + 16} \right) \cdot \left(\sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{y^2 + 16} \right)} = \\ &= \frac{|x - y| \cdot |x + y|}{\left(\sqrt[4]{x^2 + 16} + \sqrt[4]{y^2 + 16} \right) \cdot \left(\sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{y^2 + 16} \right)}. \end{aligned}$$

Korzystając z nierówności trójkąta i wykorzystując równość $|x| = \sqrt{x^2}$ otrzymujemy:

$$|x + y| \leq |x| + |y| = \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} < \sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{y^2 + 16},$$

skąd

$$\frac{|x + y|}{\sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{y^2 + 16}} < 1.$$

Ponadto zauważamy, że

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x^2 + 16} + \sqrt[4]{y^2 + 16}} \leq \frac{1}{\sqrt[4]{0 + 16} + \sqrt[4]{0 + 16}} = \frac{1}{2 + 2} = \frac{1}{4}.$$

Wykorzystanie tych nierówności pozwala dokończyć oszacowania:

$$\begin{aligned} & \frac{|x-y| \cdot |x+y|}{\left(\sqrt[4]{x^2+16} + \sqrt[4]{y^2+16}\right) \cdot \left(\sqrt{x^2+16} + \sqrt{y^2+16}\right)} = \\ & = |x-y| \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{x^2+16} + \sqrt[4]{y^2+16}} \cdot \frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+16} + \sqrt{y^2+16}} \leq |x-y| \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{|x-y|}{4}. \end{aligned}$$

621. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|,$$

gdzie $f(x) = \sqrt{x^2 + 37}$.

Rozwiązanie:

Przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \sqrt{x^2 + 37} - \sqrt{y^2 + 37} \right| = \left| \sqrt{x^2 + 37} - \sqrt{y^2 + 37} \right| \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 37} + \sqrt{y^2 + 37}}{\sqrt{x^2 + 37} + \sqrt{y^2 + 37}} = \\ &= \frac{|x^2 - y^2|}{\sqrt{x^2 + 37} + \sqrt{y^2 + 37}} = |x - y| \cdot \frac{|x + y|}{\sqrt{x^2 + 37} + \sqrt{y^2 + 37}}. \end{aligned}$$

Dowód danej w treści zadania nierówności będzie zakończony, jeśli wykazemy nierówność

$$\frac{|x + y|}{\sqrt{x^2 + 37} + \sqrt{y^2 + 37}} \leq 1,$$

która jest równoważna nierówności

$$|x + y| \leq \sqrt{x^2 + 37} + \sqrt{y^2 + 37}.$$

Powyższą nierówność dowodzimy korzystając z nierówności trójkąta i wykorzystując równość $|x| = \sqrt{x^2}$:

$$|x + y| \leq |x| + |y| = \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} < \sqrt{x^2 + 37} + \sqrt{y^2 + 37}.$$

622. Niech funkcja $f: [8, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = \frac{1}{x}$.

Zdanie Z: Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [8, \infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq C \cdot |x - y|.$$

a) Dowieść, że **zdanie Z** jest prawdziwe dla $C = 1/60$.

Rozwiązanie:

Przekształcamy i szacujemy lewą stronę dowodzonej nierówności korzystając z nierówności $x, y \geq 8$:

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \frac{|x - y|}{xy} \leq \frac{|x - y|}{8 \cdot 8} = \frac{|x - y|}{64} \leq \frac{|x - y|}{60},$$

co stanowi dowód danej w treści zadania nierówności dla $C = 1/60$ i dowolnych $x, y \geq 8$.

b) Dowieść, że **zdanie Z** jest fałszywe dla $C = 1/80$.

Rozwiązanie:

Dla $x = 8$ oraz $y = 9$ mamy $|x - y| = 1$ oraz

$$|f(x) - f(y)| = \frac{1}{72} > \frac{|x - y|}{80},$$

wskazaliśmy więc przykład liczb $x, y \geq 8$, dla których dana w treści zadania nierówność jest fałszywa przy $C = 1/80$.

Nie jest więc prawdą, że ta nierówność zachodzi dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [8, \infty)$.

623. Dla funkcji $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ określonej podanym wzorem wskazać odpowiednie liczby rzeczywiste dodatnie x, y i udowodnić nierówność

$$|f(x) - f(y)| > 100 \cdot |x - y|.$$

a) $f(x) = x^2$

Rozwiązanie:

Z równości

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = (x + y) \cdot |x - y|$$

wynika, że warunki zadania spełnia dowolna para **różnych** liczb rzeczywistych dodatnich x, y spełniających warunek

$$x + y > 100.$$

Możemy więc wskazać $x = 50, y = 51$.

b) $f(x) = \frac{1}{x}$

Rozwiązanie:

Z równości

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \frac{1}{xy} \cdot |x - y|$$

wynika, że warunki zadania spełnia dowolna para **różnych** liczb rzeczywistych dodatnich x, y spełniających warunek

$$\frac{1}{xy} > 100,$$

czyli

$$xy < \frac{1}{100}.$$

Możemy więc wskazać $x = 1/10, y = 1/11$.

624. Dana jest funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \sqrt[4]{x^4 + 1}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|.$$

Rozwiązanie:

Skorzystamy ze wzoru skróconego mnożenia

$$a^4 - b^4 = (a^2 - b^2) \cdot (a^2 + b^2) = (a - b) \cdot (a + b) \cdot (a^2 + b^2),$$

który przy założeniu $a + b \neq 0$ można zapisać w postaci

$$a - b = \frac{a^4 - b^4}{(a + b) \cdot (a^2 + b^2)}.$$

Przyjmując $a = \sqrt[4]{x^4 + 1}$ oraz $b = \sqrt[4]{y^4 + 1}$, zauważamy, że $a + b > 0$ i przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \sqrt[4]{x^4 + 1} - \sqrt[4]{y^4 + 1} \right| = \\ &= \left| \frac{(x^4 + 1) - (y^4 + 1)}{\left(\sqrt[4]{x^4 + 1} + \sqrt[4]{y^4 + 1} \right) \cdot \left(\sqrt{x^4 + 1} + \sqrt{y^4 + 1} \right)} \right| = \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{|x^4 - y^4|}{\left(\sqrt[4]{x^4 + 1} + \sqrt[4]{y^4 + 1} \right) \cdot \left(\sqrt{x^4 + 1} + \sqrt{y^4 + 1} \right)} = \\ &= \frac{|x^2 - y^2| \cdot (x^2 + y^2)}{\left(\sqrt[4]{x^4 + 1} + \sqrt[4]{y^4 + 1} \right) \cdot \left(\sqrt{x^4 + 1} + \sqrt{y^4 + 1} \right)} = \\ &= \frac{|x - y| \cdot |x + y| \cdot (x^2 + y^2)}{\left(\sqrt[4]{x^4 + 1} + \sqrt[4]{y^4 + 1} \right) \cdot \left(\sqrt{x^4 + 1} + \sqrt{y^4 + 1} \right)}. \end{aligned} \quad (2)$$

Korzystając z nierówności trójkąta i wykorzystując równość $|x| = \sqrt[4]{x^4}$ otrzymujemy:

$$|x + y| \leq |x| + |y| = \sqrt[4]{x^4} + \sqrt[4]{y^4} < \sqrt[4]{x^4 + 1} + \sqrt[4]{y^4 + 1},$$

skąd

$$\frac{|x + y|}{\sqrt[4]{x^4 + 1} + \sqrt[4]{y^4 + 1}} < 1. \quad (3)$$

Podobnie, wykorzystując równość $x^2 = \sqrt{x^4}$ otrzymujemy:

$$x^2 + y^2 = \sqrt{x^4} + \sqrt{y^4} < \sqrt{x^4 + 1} + \sqrt{y^4 + 1},$$

skąd

$$\frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^4 + 1} + \sqrt{y^4 + 1}} < 1. \quad (4)$$

Połączenie tych nierówności pozwala dokończyć oszacowania:

$$\begin{aligned} &\frac{|x - y| \cdot |x + y| \cdot (x^2 + y^2)}{\left(\sqrt[4]{x^4 + 1} + \sqrt[4]{y^4 + 1} \right) \cdot \left(\sqrt{x^4 + 1} + \sqrt{y^4 + 1} \right)} = \\ &= |x - y| \cdot \frac{|x + y|}{\sqrt[4]{x^4 + 1} + \sqrt[4]{y^4 + 1}} \cdot \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^4 + 1} + \sqrt{y^4 + 1}} \leq |x - y| \cdot 1 \cdot 1 = |x - y|. \end{aligned}$$

625. Dana jest funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \sqrt[4]{x^2 + 1}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{2}.$$

Rozwiązanie:

Skorzystamy ze wzoru skróconego mnożenia

$$a^4 - b^4 = (a^2 - b^2) \cdot (a^2 + b^2) = (a - b) \cdot (a + b) \cdot (a^2 + b^2),$$

który przy założeniu $a + b \neq 0$ można zapisać w postaci

$$a - b = \frac{a^4 - b^4}{(a + b) \cdot (a^2 + b^2)}.$$

Przyjmując $a = \sqrt[4]{x^2 + 1}$ oraz $b = \sqrt[4]{y^2 + 1}$, zauważamy, że $a + b > 0$ i przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \sqrt[4]{x^2 + 1} - \sqrt[4]{y^2 + 1} \right| = \\ &= \left| \frac{(x^2 + 1) - (y^2 + 1)}{\left(\sqrt[4]{x^2 + 1} + \sqrt[4]{y^2 + 1} \right) \cdot \left(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} \right)} \right| = \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{|x^2 - y^2|}{\left(\sqrt[4]{x^2 + 1} + \sqrt[4]{y^2 + 1} \right) \cdot \left(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} \right)} = \\ &= \frac{|x - y| \cdot |x + y|}{\left(\sqrt[4]{x^2 + 1} + \sqrt[4]{y^2 + 1} \right) \cdot \left(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} \right)}. \end{aligned} \quad (2)$$

Korzystając z nierówności trójkąta i wykorzystując równość $|x| = \sqrt{x^2}$ otrzymujemy:

$$|x + y| \leq |x| + |y| = \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} < \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1},$$

skąd

$$\frac{|x + y|}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1}} < 1. \quad (3)$$

Ponadto zauważamy, że

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x^2 + 1} + \sqrt[4]{y^2 + 1}} \leq \frac{1}{\sqrt[4]{0 + 1} + \sqrt[4]{0 + 1}} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}. \quad (4)$$

Wykorzystanie tych nierówności pozwala dokończyć oszacowania:

$$\begin{aligned} &\frac{|x - y| \cdot |x + y|}{\left(\sqrt[4]{x^2 + 1} + \sqrt[4]{y^2 + 1} \right) \cdot \left(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} \right)} = \\ &= |x - y| \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{x^2 + 1} + \sqrt[4]{y^2 + 1}} \cdot \frac{|x + y|}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1}} \leq |x - y| \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{|x - y|}{2}. \end{aligned}$$

626. Dana jest funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \sqrt[8]{x^4 + 1}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{2}.$$

Rozwiązanie:

Skorzystamy ze wzoru skróconego mnożenia

$$a^8 - b^8 = (a^4 - b^4) \cdot (a^4 + b^4) = (a^2 - b^2) \cdot (a^2 + b^2) \cdot (a^4 + b^4) =$$

$$= (a-b) \cdot (a+b) \cdot (a^2+b^2) \cdot (a^4+b^4),$$

który przy założeniu $a+b \neq 0$ można zapisać w postaci

$$a-b = \frac{a^8-b^8}{(a+b) \cdot (a^2+b^2) \cdot (a^4+b^4)}.$$

Przyjmując $a = \sqrt[8]{x^4+1}$ oraz $b = \sqrt[8]{y^4+1}$, zauważamy, że $a+b > 0$ i przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \sqrt[8]{x^4+1} - \sqrt[8]{y^4+1} \right| = \\ &= \left| \frac{(x^4+1) - (y^4+1)}{\left(\sqrt[8]{x^4+1} + \sqrt[8]{y^4+1} \right) \cdot \left(\sqrt[4]{x^4+1} + \sqrt[4]{y^4+1} \right) \cdot \left(\sqrt{x^4+1} + \sqrt{y^4+1} \right)} \right| = \\ &= \frac{|x^4 - y^4|}{\left(\sqrt[8]{x^4+1} + \sqrt[8]{y^4+1} \right) \cdot \left(\sqrt[4]{x^4+1} + \sqrt[4]{y^4+1} \right) \cdot \left(\sqrt{x^4+1} + \sqrt{y^4+1} \right)} = \\ &= \frac{|x-y| \cdot |x+y| \cdot (x^2+y^2)}{\left(\sqrt[8]{x^4+1} + \sqrt[8]{y^4+1} \right) \cdot \left(\sqrt[4]{x^4+1} + \sqrt[4]{y^4+1} \right) \cdot \left(\sqrt{x^4+1} + \sqrt{y^4+1} \right)}. \end{aligned} \quad (1)$$

Korzystając z nierówności trójkąta i wykorzystując równość $|x| = \sqrt[4]{x^4}$ otrzymujemy:

$$|x+y| \leq |x| + |y| = \sqrt[4]{x^4} + \sqrt[4]{y^4} < \sqrt[4]{x^4+1} + \sqrt[4]{y^4+1},$$

skąd

$$\frac{|x+y|}{\sqrt[4]{x^4+1} + \sqrt[4]{y^4+1}} < 1. \quad (2)$$

Podobnie, równość $x^2 = \sqrt{x^4}$ prowadzi do:

$$x^2 + y^2 = \sqrt{x^4} + \sqrt{y^4} < \sqrt{x^4+1} + \sqrt{y^4+1},$$

co daje

$$\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^4+1} + \sqrt{y^4+1}} < 1. \quad (3)$$

Ponadto zauważamy, że

$$\frac{1}{\sqrt[8]{x^4+1} + \sqrt[8]{y^4+1}} \leq \frac{1}{\sqrt[8]{0+1} + \sqrt[8]{0+1}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}. \quad (4)$$

Wykorzystanie tych nierówności pozwala dokończyć oszacowania:

$$\begin{aligned} &\frac{|x-y| \cdot |x+y| \cdot (x^2+y^2)}{\left(\sqrt[8]{x^4+1} + \sqrt[8]{y^4+1} \right) \cdot \left(\sqrt[4]{x^4+1} + \sqrt[4]{y^4+1} \right) \cdot \left(\sqrt{x^4+1} + \sqrt{y^4+1} \right)} = \\ &= |x-y| \cdot \frac{1}{\sqrt[8]{x^4+1} + \sqrt[8]{y^4+1}} \cdot \frac{|x+y|}{\sqrt[4]{x^4+1} + \sqrt[4]{y^4+1}} \cdot \frac{(x^2+y^2)}{\sqrt{x^4+1} + \sqrt{y^4+1}} \leq \\ &\leq |x-y| \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{|x-y|}{2}. \end{aligned}$$

627. Dana jest funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \sqrt[8]{x^2 + 10^8}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{4000}.$$

Rozwiązanie:

Skorzystamy ze wzoru skróconego mnożenia

$$\begin{aligned} a^8 - b^8 &= (a^4 - b^4) \cdot (a^4 + b^4) = (a^2 - b^2) \cdot (a^2 + b^2) \cdot (a^4 + b^4) = \\ &= (a - b) \cdot (a + b) \cdot (a^2 + b^2) \cdot (a^4 + b^4), \end{aligned}$$

który przy założeniu $a + b \neq 0$ można zapisać w postaci

$$a - b = \frac{a^8 - b^8}{(a + b) \cdot (a^2 + b^2) \cdot (a^4 + b^4)}.$$

Przyjmując $a = \sqrt[8]{x^2 + 10^8}$ oraz $b = \sqrt[8]{y^2 + 10^8}$, zauważamy, że $a + b > 0$ i przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \sqrt[8]{x^2 + 10^8} - \sqrt[8]{y^2 + 10^8} \right| = \\ &= \left| \frac{(x^2 + 10^8) - (y^2 + 10^8)}{\left(\sqrt[8]{x^2 + 10^8} + \sqrt[8]{y^2 + 10^8} \right) \cdot \left(\sqrt[4]{x^2 + 10^8} + \sqrt[4]{y^2 + 10^8} \right) \cdot \left(\sqrt{x^2 + 10^8} + \sqrt{y^2 + 10^8} \right)} \right| = \\ &= \frac{|x^2 - y^2|}{\left(\sqrt[8]{x^2 + 10^8} + \sqrt[8]{y^2 + 10^8} \right) \cdot \left(\sqrt[4]{x^2 + 10^8} + \sqrt[4]{y^2 + 10^8} \right) \cdot \left(\sqrt{x^2 + 10^8} + \sqrt{y^2 + 10^8} \right)} = \\ &= \frac{|x - y| \cdot |x + y|}{\left(\sqrt[8]{x^2 + 10^8} + \sqrt[8]{y^2 + 10^8} \right) \cdot \left(\sqrt[4]{x^2 + 10^8} + \sqrt[4]{y^2 + 10^8} \right) \cdot \left(\sqrt{x^2 + 10^8} + \sqrt{y^2 + 10^8} \right)}. \quad (1) \end{aligned}$$

Korzystając z nierówności trójkąta i wykorzystując równość $|x| = \sqrt{x^2}$ otrzymujemy:

$$|x + y| \leq |x| + |y| = \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} < \sqrt{x^2 + 10^8} + \sqrt{y^2 + 10^8},$$

skąd

$$\frac{|x + y|}{\sqrt{x^2 + 10^8} + \sqrt{y^2 + 10^8}} < 1. \quad (2)$$

Ponadto zauważamy, że

$$\frac{1}{\sqrt[8]{x^2 + 10^8} + \sqrt[8]{y^2 + 10^8}} \leq \frac{1}{\sqrt[8]{0 + 10^8} + \sqrt[8]{0 + 10^8}} = \frac{1}{10 + 10} = \frac{1}{20}. \quad (3)$$

Analogicznie

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x^2 + 10^8} + \sqrt[4]{y^2 + 10^8}} \leq \frac{1}{\sqrt[4]{0 + 10^8} + \sqrt[4]{0 + 10^8}} = \frac{1}{100 + 100} = \frac{1}{200}. \quad (4)$$

Wykorzystanie tych nierówności pozwala dokończyć oszacowania:

$$\frac{|x - y| \cdot |x + y|}{\left(\sqrt[8]{x^2 + 10^8} + \sqrt[8]{y^2 + 10^8} \right) \cdot \left(\sqrt[4]{x^2 + 10^8} + \sqrt[4]{y^2 + 10^8} \right) \cdot \left(\sqrt{x^2 + 10^8} + \sqrt{y^2 + 10^8} \right)} =$$

$$\begin{aligned}
&= |x-y| \cdot \frac{1}{\sqrt[8]{x^2+10^8} + \sqrt[8]{y^2+10^8}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{x^2+10^8} + \sqrt[4]{y^2+10^8}} \cdot \frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+10^8} + \sqrt{y^2+10^8}} \leqslant \\
&\leqslant |x-y| \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{200} \cdot 1 = \frac{|x-y|}{4000}.
\end{aligned}$$

628. Podać wartości granic

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\pi/2$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \operatorname{arctg} x = -\pi/4$

c) $\lim_{x \rightarrow -1/\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x = -\pi/6$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{arctg} x = 0$

e) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \operatorname{arctg} x = \pi/3$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \pi/2$

629. Podać wartości granic

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_{(\sqrt{37}-5)} x = -\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_{(\sqrt{37}-6)} x = +\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \log_{(\sqrt{37}-5)} x = 0$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \log_{(\sqrt{37}-6)} x = 0$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_{(\sqrt{37}-5)} x = +\infty$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_{(\sqrt{37}-6)} x = -\infty$

W każdym z 18 poniższych zadań podaj wartość granicy ciągu (liczba rzeczywista) lub granicy niewłaściwej ($+\infty$ lub $-\infty$).

Wpisz literkę **R**, jeśli granica nie istnieje (tzn. gdy ciąg występujący pod znakiem granicy jest rozbieżny, ale nie jest to rozbieżność do $+\infty$ ani do $-\infty$).

630. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2(n+8)}{\log_2 n} = 1$

631. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\log_2(n+8) - \log_2 n) = 0$

632. $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_n(n+8) = 1$

633. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2(8n+1)}{\log_2 n} = 1$

634. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\log_2(8n+1) - \log_2 n) = 3$

635. $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_n(8n+1) = 1$

636. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2(n^8+1)}{\log_2 n} = 8$

637. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\log_2(n^8+1) - \log_2 n) = +\infty$

638. $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_n(n^8+1) = 8$

639. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_3(n+9)}{\log_3 n} = 1$

640. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\log_3(n+9) - \log_3 n) = 0$

641. $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_n(n+9) = 1$

642. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_3(9n+1)}{\log_3 n} = 1$

643. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\log_3(9n+1) - \log_3 n) = 2$

644. $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_n(9n+1) = 1$

$$645. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_3(n^9 + 1)}{\log_3 n} = 9$$

$$646. \lim_{n \rightarrow \infty} (\log_3(n^9 + 1) - \log_3 n) = +\infty$$

$$647. \lim_{n \rightarrow \infty} \log_n(n^9 + 1) = 9$$

W każdym z poniższych 11 zadań podaj wartość granicy funkcji lub granicy niewłaściwej $+\infty = \infty$ albo $-\infty$.

$$648. \lim_{x \rightarrow 0^+} \log(\sqrt{17}-3)^x = -\infty$$

$$649. \lim_{x \rightarrow 0^+} \log(\sqrt{13}-3)^x = +\infty$$

$$650. \lim_{x \rightarrow +\infty} \log(\sqrt{17}-3)^x = +\infty$$

$$651. \lim_{x \rightarrow +\infty} \log(\sqrt{13}-3)^x = -\infty$$

$$652. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{17}-3)^x = +\infty$$

$$653. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{13}-3)^x = 0$$

$$654. \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{17}-3)^x = 0$$

$$655. \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{13}-3)^x = +\infty$$

$$656. \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} 2x = \pi/2$$

$$657. \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg}(\sqrt{17}-4)^x = \pi/2$$

$$658. \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg}(\sqrt{13}-4)^x = -\pi/2$$

659. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = a\{x\}^3 + b\{x\}^2 + c\{x\} + d,$$

gdzie $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x .

W każdym z podpunktów uzupełnij brakującą liczbę tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczba o żądanej własności nie istnieje.

a) $a = -5$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$

b) $a = 1$, $b = -4$, $c = 3$, $d = 4$

c) $a = 1$, $b = 2$, $c = -3$, $d = 4$

d) $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = \mathbf{NIE}$

660. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = a \cdot A^{\{x\}} - b \cdot B^{\{x\}},$$

gdzie $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x , a wyrażenia $\{x\}$ występują w wykładnikach potęg.

W każdym z podpunktów uzupełnij brakującą liczbę rzeczywistą dodatnią tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczba rzeczywista dodatnia o żądanej własności nie istnieje.

a) $a = 4$, $A = 6$, $b = 5$, $B = 5$

b) $a = 2$, $A = 7$, $b = 3$, $B = 5$

c) $a = 2$, $A = 6$, $b = 5$, $B = 3$

d) $a=2$, $A=4$, $b=3$, $B=3$

661. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{dla } x < 0 \\ dx + e & \text{dla } 0 \leq x < 1 \\ ax^2 + bx + c & \text{dla } 1 \leq x \end{cases}$$

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

a) $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=3$, $e=3$

b) $a=1$, $b=2$, $c=\mathbf{NIE}$, $d=4$, $e=\mathbf{NIE}$

c) $a=1$, $b=3$, $c=5$, $d=4$, $e=5$

d) $a=2$, $b=7$, $c=8$, $d=9$, $e=8$

e) $a=6$, $b=7$, $c=10$, $d=13$, $e=10$

f) $a=6$, $b=3$, $c=8$, $d=9$, $e=8$

662. Czy funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = [x + \log_2 a] - [x]$ jest ciągła, jeżeli

a) $a=1$ **TAK**

b) $a=2$ **TAK**

c) $a=6$ **NIE**

d) $a=8$ **TAK**

663. Czy funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = [x+a] - [x+b]$ jest ciągła, jeżeli

a) $a=1/2$, $b=3/2$ **TAK**

b) $a=1/3$, $b=-2/3$ **TAK**

c) $a=1/4$, $b=3/4$ **NIE**

d) $a=1/5$, $b=-9/5$ **TAK**

664. Czy funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} |x^2 - 25| & \text{dla } x < a \\ 24 & \text{dla } a \leq x < b \\ |x^2 - 25| & \text{dla } b \leq x \end{cases}$$

jest ciągła, jeżeli

a) $a=-7$, $b=-5$ **NIE**

b) $a=-7$, $b=-1$ **TAK**

c) $a=-5$, $b=-3$ **NIE**

d) $a=-5$, $b=-1$ **NIE**

e) $a=-3$, $b=-1$ **NIE**

f) $a=-3$, $b=1$ **NIE**

g) $a=-1$, $b=1$ **TAK**

h) $a=-1$, $b=3$ **NIE**

665. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = a \cdot \{2x\} + b \cdot \{2x\}^2 + c \cdot \{x\},$$

gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y .

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

a) $a=1$, $b=-1$, $c=0$

b) $a=-2$, $b=2$, $c=0$

c) $a=\mathbf{NIE}$, $b=\mathbf{NIE}$, $c=3$

d) $a=2$, $b=-2$, $c=0$

e) $a=-3$, $b=3$, $c=0$

f) $a=\mathbf{NIE}$, $b=\mathbf{NIE}$, $c=5$

666. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = a \cdot \{2x\} + b \cdot \{2x+1\} + c \cdot \{x\} + d \cdot \left\{x + \frac{1}{2}\right\},$$

gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y .

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

a) $a = 1, \quad b = 2, \quad c = -3, \quad d = -3$

b) $a = -5, \quad b = 2, \quad c = 3, \quad d = 3$

c) $a = \text{NIE}, \quad b = \text{NIE}, \quad c = 3, \quad d = 4$

d) $a = 2, \quad b = 3, \quad c = -5, \quad d = -5$

e) $a = -9, \quad b = 3, \quad c = 6, \quad d = 6$

f) $a = \text{dowolne}, \quad b = -6-a, \quad c = 6, \quad d = 6$

667. Podać wszystkie trzy pary parametrów (a, b) , dla których funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x < a \\ x^3 & \text{dla } a \leq x < b \\ x & \text{dla } b \leq x \end{cases}$$

jest ciągła.

668. Podać wszystkie sześć par parametrów (a, b) , dla których funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 6 & \text{dla } x < a \\ |x^2 - 10x + 15| & \text{dla } a \leq x < b \\ 6 & \text{dla } b \leq x \end{cases}$$

jest ciągła.

669. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = a \cdot \{x\} + b \cdot 3^{\{x\}},$$

gdzie $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x , a w drugim składniku wyrażenie $\{x\}$ występuje **w wykładniku potęgi** o podstawie 3.

Wyznaczyć wszystkie pary parametrów rzeczywistych (a, b) , dla których funkcja f określona powyższym wzorem jest ciągła.

Rozwiązanie:

Funkcja f zależy od $\{x\}$, jest więc okresowa z okresem 1. Ponadto f jest ciągła we wszystkich punktach niecałkowitych. Pozostaje zbadać ciągłość funkcji f w punktach całkowitych, a wobec jej okresowości, wystarczy zbadać ciągłość w punkcie 1.

Ponieważ

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = a + 3b$$

oraz

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = b,$$

funkcja f jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a + 3b = b,$$

czyli

$$a = -2b.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy $a = -2b$.

670. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = a \cdot \{2x\} + b \cdot \{x\} + c \cdot \left\{x + \frac{1}{2}\right\},$$

gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y .

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

a) $a = 1, \quad b = -1, \quad c = -1$

b) $a = -2, \quad b = 2, \quad c = 2$

c) $a = -3, \quad b = 3, \quad c = 3$

d) $a = 4, \quad b = -4, \quad c = -4$

e) $a = -5, \quad b = 5, \quad c = 5$

f) $a = -6, \quad b = 6, \quad c = 6$

W każdym z pięciu poniższych zadań podaj takie liczby rzeczywiste $a < b$, aby funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona podanym wzorem była ciągła.

$$671. f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x < a \\ 1 & \text{dla } a \leq x < b \\ x^2 & \text{dla } b \leq x \end{cases} \quad a = -1, \quad b = 1.$$

$$672. f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x < a \\ x & \text{dla } a \leq x < b \\ x^2 & \text{dla } b \leq x \end{cases} \quad a = 0, \quad b = 1.$$

$$673. f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x < a \\ x+2 & \text{dla } a \leq x < b \\ x^2 & \text{dla } b \leq x \end{cases} \quad a = -1, \quad b = 2.$$

$$674. f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x < a \\ x+6 & \text{dla } a \leq x < b \\ x^2 & \text{dla } b \leq x \end{cases} \quad a = -2, \quad b = 3.$$

$$675. f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x < a \\ 2x & \text{dla } a \leq x < b \\ x^2 & \text{dla } b \leq x \end{cases} \quad a = 0, \quad b = 2.$$

W każdym z siedmiu poniższych zadań podaj wartość granicy funkcji (liczba rzeczywista) lub granicy niewłaściwej ($+\infty$ lub $-\infty$).

Wpisz literkę **R**, jeśli nie istnieje granica ani granica niewłaściwa.

$$676. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x+2} = e^3$$

$$677. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{3x+2}} = 1$$

$$678. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{3x^2+2}} = e^{\sqrt{3}}$$

$$679. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{3x^3+2}} = +\infty$$

$$680. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{3x^2}\right)^x = 1$$

$$681. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{3x^2}\right)^{x^2} = \sqrt[3]{e}$$

$$682. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{3x^2}\right)^{x^3} = +\infty$$

W każdym z osiemnastu poniższych zadań podaj wartość granicy funkcji (liczba rzeczywista) lub granicy niewłaściwej ($+\infty$ lub $-\infty$).

Wpisz literkę **R**, jeśli nie istnieje granica ani granica niewłaściwa.

Przypomnienie: Zapis $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y .

$$683. \lim_{x \rightarrow 16^-} \{\log_4 x\} = 1$$

$$684. \lim_{x \rightarrow 16^+} \{\log_4 x\} = 0$$

$$685. \lim_{x \rightarrow 16^-} \{\log_8 x\} = 1/3$$

$$686. \lim_{x \rightarrow 16^+} \{\log_8 x\} = 1/3$$

$$687. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = e^2$$

$$688. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x = e^3$$

$$689. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^x}\right)^{(x+4)^x} = e^{e^4}$$

$$690. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^x}\right)^{(x+27)^x} = e^{e^{27}}$$

$$691. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^x}\right)^{(x+256)^x} = e^{e^{256}}$$

$$692. \lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt[3]{x} - 4}{x - 64} = 1/48$$

$$693. \lim_{x \rightarrow 64} \frac{x - 64}{\sqrt{x} - 8} = 16$$

$$694. \lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt[3]{x} - 4}{\sqrt{x} - 8} = 1/3$$

$$695. \lim_{x \rightarrow 0^+} 2^{2^{1/x}} = +\infty$$

$$696. \lim_{x \rightarrow 0^-} 2^{2^{1/x}} = 1$$

$$697. \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{2^{1/x}} = 2$$

$$698. \lim_{x \rightarrow 0^+} 2^{2^{2^{1/x}}} = +\infty$$

$$699. \lim_{x \rightarrow 0^-} 2^{2^{2^{1/x}}} = 2$$

$$700. \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{2^{2^{1/x}}} = 4$$