

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

1. Jeżeli pole powierzchni całkowitej sześcianu S jest większe od pola powierzchni całkowitej sześcianu T o $p\%$, to objętość sześcianu S jest większa od objętości sześcianu T o $q\%$. Dla podanej liczby p podać taką liczbę naturalną q , aby powyższe zdanie było prawdziwe.

a) $p = 300$, $q = \dots\dots\dots$

b) $p = 800$, $q = \dots\dots\dots$

c) $p = 1500$, $q = \dots\dots\dots$

d) $p = 2400$, $q = \dots\dots\dots$

2. Potęgą nazwiemy każdą liczbę postaci a^b , gdzie a, b są liczbami naturalnymi większymi od 1. Dla podanej liczby n podać najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią k taką, że liczba nk jest potęgą.

a) $n = 2^{17} \cdot 3^{23}$, $k = \dots\dots\dots$

b) $n = 2^{22} \cdot 3^{19}$, $k = \dots\dots\dots$

c) $n = 2^{17} \cdot 3^{22}$, $k = \dots\dots\dots$

d) $n = 2^{17} \cdot 3^{19}$, $k = \dots\dots\dots$

3. Dla podanej liczby n podać największą liczbę naturalną k taką, że liczba $\sqrt[k]{n^n}$ jest całkowita.

a) $n = 27$, $k = \dots\dots\dots$

b) $n = 25$, $k = \dots\dots\dots$

c) $n = 400$, $k = \dots\dots\dots$

d) $n = 32$, $k = \dots\dots\dots$

4. Dla podanej liczby a i podać taką liczbę rzeczywistą dodatnią x , że $\log_x(2x) = a$.

a) $a = 3$, $x = \dots\dots\dots$

b) $a = 1/2$, $x = \dots\dots\dots$

c) $a = -1$, $x = \dots\dots\dots$

d) $a = 2$, $x = \dots\dots\dots$

5. Zapisać dziedzinę funkcji f określonej podanym wzorem w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów (nie używać różnicy zbiorów).

a) $f(x) = \log_x \log_x 2$, $D_f = \dots\dots\dots$

b) $f(x) = \log_x \log_x \log_x 2$, $D_f = \dots\dots\dots$

c) $f(x) = \log_x \log_x (1/2)$, $D_f = \dots\dots\dots$

d) $f(x) = \log_x \log_x \log_x (1/2)$, $D_f = \dots\dots\dots$

6. Zapisać dziedzinę funkcji f określonej podanym wzorem w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów (nie używać różnicy zbiorów).

a) $f(x) = \log_{(x^3-27)}(x^3-8)$,
 $D_f = \dots\dots\dots$

b) $f(x) = \log_{(x^3-8)}(x^3-27)$,
 $D_f = \dots\dots\dots$

c) $f(x) = \log_{(x^2-4)}(x^2-9)$,
 $D_f = \dots\dots\dots$

d) $f(x) = \log_{(x^2-9)}(x^2-4)$,
 $D_f = \dots\dots\dots$

7. Dla podanych liczb a i b podać taką liczbę rzeczywistą dodatnią x , że $\{\log_2 x\} = \{\log_2 a\}$ oraz $\{\log_3 x\} = \{\log_3 b\}$, gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y .

a) $a = 15$, $b = 20$, $x = \dots\dots\dots$

b) $a = 20$, $b = 15$, $x = \dots\dots\dots$

c) $a = 25$, $b = 600$, $x = \dots\dots\dots$

d) $a = 600$, $b = 25$, $x = \dots\dots\dots$

8. Dla podanej liczby a podać najmniejszą liczbę rzeczywistą $x > 1$ taką, że $\{\log_2 x\} = \{\log_4 a\}$, gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y .

a) $a = 32$, $x = \dots\dots\dots$

b) $a = 18$, $x = \dots\dots\dots$

c) $a = 10$, $x = \dots\dots\dots$

d) $a = 9$, $x = \dots\dots\dots$

9. Dla podanej liczby n podać najmniejszą dodatnią miarę kąta α (w stopniach) spełniającą równanie $\sin \alpha = \sin(n\alpha)$.

a) $n = 5$, $\alpha = \dots\dots\dots$

b) $n = 3$, $\alpha = \dots\dots\dots$

c) $n = 2$, $\alpha = \dots\dots\dots$

d) $n = 4$, $\alpha = \dots\dots\dots$

10. Zapisać zbiór rozwiązań podanych nierówności w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów (nie używać różnicy zbiorów).

a) $0 < |x^2 - 65| < 16$,

b) $16 < |x^2 - 65|$,

c) $16 < |x^2 - 65| < 56$,

d) $56 < |x^2 - 65|$,

11. Funkcja f jest zdefiniowana wzorem $f(x) = \{\log_{32} x\}$, gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y . Zapisać zbiór wartości funkcji f na podanym przedziale w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów (nie używać różnicy zbiorów).

a) $(32\sqrt[7]{2}, 128)$,

b) $(1/2, \sqrt{2})$,

c) $(2, 64)$,

d) $(4, 32\sqrt{2})$,

12. W dowolnym rosnącym postępie arytmetycznym 2015-wyrazowym, w którym wyrazy pierwszy, drugi i n -ty tworzą (w tej właśnie kolejności) rosnący postęp geometryczny, także wyrazy pierwszy, trzeci i k -ty tworzą (w tej właśnie kolejności) rosnący postęp geometryczny. Dla podanej liczby n podać taką liczbę naturalną k , aby powyższe zdanie było prawdziwe.

a) $n = 5$, $k =$

b) $n = 6$, $k =$

c) $n = 7$, $k =$

d) $n = 4$, $k =$