

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

1. Po zmieszaniu 2015 litrów roztworu pewnej substancji o stężeniu 10% z 2015 litrami roztworu tejże substancji o stężeniu $p\%$, otrzymano roztwór o stężeniu $q\%$. Dla podanego q podać p .

a) $q = 20$, $p = \mathbf{30}$

b) $q = 30$, $p = \mathbf{50}$

c) $q = 40$, $p = \mathbf{70}$

d) $q = 50$, $p = \mathbf{90}$

2. Dla podanych liczb p, q podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego takie liczby wymierne dodatnie a, b , że liczba a stanowi $p\%$ iloczynu ab , a liczba b stanowi $q\%$ iloczynu ab .

a) $p = 25$, $q = 80$, $a = \mathbf{5/4}$, $b = \mathbf{4}$

b) $p = 20$, $q = 80$, $a = \mathbf{5/4}$, $b = \mathbf{5}$

c) $p = 25$, $q = 75$, $a = \mathbf{4/3}$, $b = \mathbf{4}$

d) $p = 40$, $q = 60$, $a = \mathbf{5/3}$, $b = \mathbf{5/2}$

3. Dla podanej liczby d podać zbiór wszystkich liczb całkowitych nieujemnych k o następującej własności:

Istnieje postęp arytmetyczny 61-wyrazowy o wyrazach całkowitych dodatnich, który ma dokładnie k wyrazów podzielnych przez d .

a) $d = 3$, $k \in \{\mathbf{0}, \mathbf{20}, \mathbf{21}, \mathbf{61}\}$

b) $d = 2$, $k \in \{\mathbf{0}, \mathbf{30}, \mathbf{31}, \mathbf{61}\}$

c) $d = 5$, $k \in \{\mathbf{0}, \mathbf{12}, \mathbf{13}, \mathbf{61}\}$

d) $d = 4$, $k \in \{\mathbf{0}, \mathbf{15}, \mathbf{16}, \mathbf{30}, \mathbf{31}, \mathbf{61}\}$

4. Dla podanej liczby d podać zbiór wszystkich liczb całkowitych nieujemnych k o następującej własności:

Istnieje postęp geometryczny 2015-wyrazowy o wyrazach całkowitych dodatnich, który ma dokładnie k wyrazów podzielnych przez d .

a) $d = 16$, $k \in \{0, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015\}$

b) $d = 2$, $k \in \{0, 2014, 2015\}$

c) $d = 4$, $k \in \{0, 2013, 2014, 2015\}$

d) $d = 8$, $k \in \{0, 2012, 2013, 2014, 2015\}$

5. Dla podanej liczby a podać największą liczbę rzeczywistą $x < 100$ taką, że $\{\log_4 x\} = \{\log_2 a\}$, gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y .

a) $a = 3$, $x = 36$

b) $a = 7$, $x = 49$

c) $a = 5$, $x = 25$

d) $a = 11$, $x = 121/4$

6. Zapisać zbiór rozwiązań podanej nierówności w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów (nie używać różnicy zbiorów).

a) $\log_x(9/4) < -1/2$, $(16/81, 1)$

b) $\log_x(9/4) > -2$, $(0, 2/3) \cup (1, +\infty)$

c) $\log_x(9/4) > 2$, $(1, 3/2)$

d) $\log_x(9/4) < 1/2$, $(0, 1) \cup (81/16, +\infty)$

7. Funkcja f jest zdefiniowana wzorem $f(x) = \{\log_{27} x\}$, gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y . Zapisać zbiór wartości funkcji f na podanym przedziale w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów (nie używać różnicy zbiorów).

a) $(1/3, \sqrt{3})$, $[0, 1/6) \cup (2/3, 1)$

b) $(3, 81)$, $[0, 1/3) \cup (1/3, 1)$

c) $(27\sqrt[3]{3}, 81\sqrt{3})$, $(1/9, 1/2)$

d) $(9, 27\sqrt{3})$, $[0, 1/6) \cup (2/3, 1)$

8. Dla podanych liczb m, n podać najmniejszą dodatnią miarę kąta α (w stopniach) spełniającą równanie $\sin(m\alpha) = \sin(n\alpha)$.

a) $m = 5$, $n = 13$, $\alpha = \mathbf{10^\circ}$

b) $m = 4$, $n = 5$, $\alpha = \mathbf{20^\circ}$

c) $m = 3$, $n = 7$, $\alpha = \mathbf{18^\circ}$

d) $m = 2$, $n = 3$, $\alpha = \mathbf{36^\circ}$

9. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC . Dla podanej miary kąta $\sphericalangle ABC$ podać miarę kąta wypukłego $\sphericalangle AOC$.

a) $\sphericalangle ABC = 150^\circ$, $\sphericalangle AOC = \mathbf{60^\circ}$

b) $\sphericalangle ABC = 60^\circ$, $\sphericalangle AOC = \mathbf{120^\circ}$

c) $\sphericalangle ABC = 30^\circ$, $\sphericalangle AOC = \mathbf{60^\circ}$

d) $\sphericalangle ABC = 120^\circ$, $\sphericalangle AOC = \mathbf{120^\circ}$

10. Rozważamy 40-kąt foremny $A_1A_2A_3\dots A_{40}$. Dla podanych liczb m, n podać zbiór wszystkich takich liczb całkowitych dodatnich $k \leq 40$, różnych od m, n , że trójkąt $A_mA_nA_k$ jest prostokątny.

a) $m = 20, \quad n = 21, \quad k \in \{1, 40\}$

b) $m = 11, \quad n = 22, \quad k \in \{2, 31\}$

c) $m = 1, \quad n = 2, \quad k \in \{21, 22\}$

d) $m = 17, \quad n = 29, \quad k \in \{9, 37\}$

11. Dla podanej liczby n podać takie liczby naturalne a, b, c **większe od 1**, że $n^n = a^{b^c}$. Potęgowanie wykonuje się *od góry*, tzn. $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.

a) $n = 45, \quad a = 45^5, \quad b = 3, \quad c = 2$

b) $n = 20, \quad a = 20^5 = 3200000, \quad b = 2, \quad c = 2$

c) $n = 18, \quad a = 18^2 = 324, \quad b = 3, \quad c = 2$

d) $n = 75, \quad a = 75^3, \quad b = 5, \quad c = 2$

12. Dla podanej liczby n podać takie liczby naturalne a, b, c **większe od 1**, że $n^n = a^{b^c}$, a przy tym liczba c jest możliwie **największa**.

a) $n = 72, \quad a = 72^9, \quad b = 2, \quad c = 3$

b) $n = 36, \quad a = 6^9, \quad b = 2, \quad c = 3$

c) $n = 1600, \quad a = 40^{25}, \quad b = 2, \quad c = 7$

d) $n = 27, \quad a = 3, \quad b = 3, \quad c = 4$

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

1. Po zmieszaniu 2015 litrów roztworu pewnej substancji o stężeniu 10% z 2015 litrami roztworu tejże substancji o stężeniu $p\%$, otrzymano roztwór o stężeniu $q\%$. Dla podanego q podać p .

a) $q = 40$, $p = \mathbf{70}$

b) $q = 30$, $p = \mathbf{50}$

c) $q = 20$, $p = \mathbf{30}$

d) $q = 50$, $p = \mathbf{90}$

2. Dla podanych liczb p, q podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego takie liczby wymierne dodatnie a, b , że liczba a stanowi $p\%$ iloczynu ab , a liczba b stanowi $q\%$ iloczynu ab .

a) $p = 40$, $q = 60$, $a = \mathbf{5/3}$, $b = \mathbf{5/2}$

b) $p = 25$, $q = 75$, $a = \mathbf{4/3}$, $b = \mathbf{4}$

c) $p = 25$, $q = 80$, $a = \mathbf{5/4}$, $b = \mathbf{4}$

d) $p = 20$, $q = 80$, $a = \mathbf{5/4}$, $b = \mathbf{5}$

3. Dla podanej liczby d podać zbiór wszystkich liczb całkowitych nieujemnych k o następującej własności:

Istnieje postęp arytmetyczny 61-wyrazowy o wyrazach całkowitych dodatnich, który ma dokładnie k wyrazów podzielnych przez d .

a) $d = 5$, $k \in \{\mathbf{0}, \mathbf{12}, \mathbf{13}, \mathbf{61}\}$

b) $d = 3$, $k \in \{\mathbf{0}, \mathbf{20}, \mathbf{21}, \mathbf{61}\}$

c) $d = 2$, $k \in \{\mathbf{0}, \mathbf{30}, \mathbf{31}, \mathbf{61}\}$

d) $d = 4$, $k \in \{\mathbf{0}, \mathbf{15}, \mathbf{16}, \mathbf{30}, \mathbf{31}, \mathbf{61}\}$

4. Dla podanej liczby d podać zbiór wszystkich liczb całkowitych nieujemnych k o następującej własności:

Istnieje postęp geometryczny 2015-wyrazowy o wyrazach całkowitych dodatnich, który ma dokładnie k wyrazów podzielnych przez d .

a) $d = 16$, $k \in \{0, \mathbf{2011}, \mathbf{2012}, \mathbf{2013}, \mathbf{2014}, \mathbf{2015}\}$

b) $d = 8$, $k \in \{0, \mathbf{2012}, \mathbf{2013}, \mathbf{2014}, \mathbf{2015}\}$

c) $d = 4$, $k \in \{0, \mathbf{2013}, \mathbf{2014}, \mathbf{2015}\}$

d) $d = 2$, $k \in \{0, \mathbf{2014}, \mathbf{2015}\}$

5. Dla podanej liczby a podać największą liczbę rzeczywistą $x < 100$ taką, że $\{\log_4 x\} = \{\log_2 a\}$, gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y .

a) $a = 11$, $x = \mathbf{121/4}$

b) $a = 7$, $x = \mathbf{49}$

c) $a = 5$, $x = \mathbf{25}$

d) $a = 3$, $x = \mathbf{36}$

6. Zapisać zbiór rozwiązań podanej nierówności w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów (nie używać różnicy zbiorów).

a) $\log_x(9/4) > -2$, $(\mathbf{0}, \mathbf{2/3}) \cup (\mathbf{1}, +\infty)$

b) $\log_x(9/4) < 1/2$, $(\mathbf{0}, \mathbf{1}) \cup (\mathbf{81/16}, +\infty)$

c) $\log_x(9/4) < -1/2$, $(\mathbf{16/81}, \mathbf{1})$

d) $\log_x(9/4) > 2$, $(\mathbf{1}, \mathbf{3/2})$

7. Funkcja f jest zdefiniowana wzorem $f(x) = \{\log_{27} x\}$, gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y . Zapisać zbiór wartości funkcji f na podanym przedziale w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów (nie używać różnicy zbiorów).

a) $(1/3, \sqrt{3})$, $[0, 1/6) \cup (2/3, 1)$

b) $(3, 81)$, $[0, 1/3) \cup (1/3, 1)$

c) $(9, 27\sqrt{3})$, $[0, 1/6) \cup (2/3, 1)$

d) $(27\sqrt[3]{3}, 81\sqrt{3})$, $(1/9, 1/2)$

8. Dla podanych liczb m, n podać najmniejszą dodatnią miarę kąta α (w stopniach) spełniającą równanie $\sin(m\alpha) = \sin(n\alpha)$.

a) $m = 2$, $n = 3$, $\alpha = \mathbf{36^\circ}$

b) $m = 4$, $n = 5$, $\alpha = \mathbf{20^\circ}$

c) $m = 3$, $n = 7$, $\alpha = \mathbf{18^\circ}$

d) $m = 5$, $n = 13$, $\alpha = \mathbf{10^\circ}$

9. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC . Dla podanej miary kąta $\sphericalangle ABC$ podać miarę kąta wypukłego $\sphericalangle AOC$.

a) $\sphericalangle ABC = 60^\circ$, $\sphericalangle AOC = \mathbf{120^\circ}$

b) $\sphericalangle ABC = 120^\circ$, $\sphericalangle AOC = \mathbf{120^\circ}$

c) $\sphericalangle ABC = 30^\circ$, $\sphericalangle AOC = \mathbf{60^\circ}$

d) $\sphericalangle ABC = 150^\circ$, $\sphericalangle AOC = \mathbf{60^\circ}$

10. Rozważamy 40-kąt foremny $A_1A_2A_3\dots A_{40}$. Dla podanych liczb m, n podać zbiór wszystkich takich liczb całkowitych dodatnich $k \leq 40$, różnych od m, n , że trójkąt $A_mA_nA_k$ jest prostokątny.

a) $m = 17, \quad n = 29, \quad k \in \{9, 37\}$

b) $m = 20, \quad n = 21, \quad k \in \{1, 40\}$

c) $m = 11, \quad n = 22, \quad k \in \{2, 31\}$

d) $m = 1, \quad n = 2, \quad k \in \{21, 22\}$

11. Dla podanej liczby n podać takie liczby naturalne a, b, c **większe od 1**, że $n^n = a^{b^c}$. Potęgowanie wykonuje się *od góry*, tzn. $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.

a) $n = 75, \quad a = 75^3, \quad b = 5, \quad c = 2$

b) $n = 45, \quad a = 45^5, \quad b = 3, \quad c = 2$

c) $n = 18, \quad a = 18^2 = 324, \quad b = 3, \quad c = 2$

d) $n = 20, \quad a = 20^5 = 3200000, \quad b = 2, \quad c = 2$

12. Dla podanej liczby n podać takie liczby naturalne a, b, c **większe od 1**, że $n^n = a^{b^c}$, a przy tym liczba c jest możliwie **największa**.

a) $n = 72, \quad a = 72^9, \quad b = 2, \quad c = 3$

b) $n = 36, \quad a = 6^9, \quad b = 2, \quad c = 3$

c) $n = 27, \quad a = 3, \quad b = 3, \quad c = 4$

d) $n = 1600, \quad a = 40^{25}, \quad b = 2, \quad c = 7$

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

1. Po zmieszaniu 2015 litrów roztworu pewnej substancji o stężeniu 10% z 2015 litrami roztworu tejże substancji o stężeniu $p\%$, otrzymano roztwór o stężeniu $q\%$. Dla podanego q podać p .

a) $q = 40$, $p = \mathbf{70}$

b) $q = 20$, $p = \mathbf{30}$

c) $q = 50$, $p = \mathbf{90}$

d) $q = 30$, $p = \mathbf{50}$

2. Dla podanych liczb p , q podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego takie liczby wymierne dodatnie a , b , że liczba a stanowi $p\%$ iloczynu ab , a liczba b stanowi $q\%$ iloczynu ab .

a) $p = 25$, $q = 80$, $a = \mathbf{5/4}$, $b = \mathbf{4}$

b) $p = 25$, $q = 75$, $a = \mathbf{4/3}$, $b = \mathbf{4}$

c) $p = 40$, $q = 60$, $a = \mathbf{5/3}$, $b = \mathbf{5/2}$

d) $p = 20$, $q = 80$, $a = \mathbf{5/4}$, $b = \mathbf{5}$

3. Dla podanej liczby d podać zbiór wszystkich liczb całkowitych nieujemnych k o następującej własności:

Istnieje postęp arytmetyczny 61-wyrazowy o wyrazach całkowitych dodatnich, który ma dokładnie k wyrazów podzielnych przez d .

a) $d = 2$, $k \in \{\mathbf{0}, \mathbf{30}, \mathbf{31}, \mathbf{61}\}$

b) $d = 3$, $k \in \{\mathbf{0}, \mathbf{20}, \mathbf{21}, \mathbf{61}\}$

c) $d = 5$, $k \in \{\mathbf{0}, \mathbf{12}, \mathbf{13}, \mathbf{61}\}$

d) $d = 4$, $k \in \{\mathbf{0}, \mathbf{15}, \mathbf{16}, \mathbf{30}, \mathbf{31}, \mathbf{61}\}$

4. Dla podanej liczby d podać zbiór wszystkich liczb całkowitych nieujemnych k o następującej własności:

Istnieje postęp geometryczny 2015-wyrazowy o wyrazach całkowitych dodatnich, który ma dokładnie k wyrazów podzielnych przez d .

a) $d = 16$, $k \in \{0, \mathbf{2011}, \mathbf{2012}, \mathbf{2013}, \mathbf{2014}, \mathbf{2015}\}$

b) $d = 4$, $k \in \{0, \mathbf{2013}, \mathbf{2014}, \mathbf{2015}\}$

c) $d = 8$, $k \in \{0, \mathbf{2012}, \mathbf{2013}, \mathbf{2014}, \mathbf{2015}\}$

d) $d = 2$, $k \in \{0, \mathbf{2014}, \mathbf{2015}\}$

5. Dla podanej liczby a podać największą liczbę rzeczywistą $x < 100$ taką, że $\{\log_4 x\} = \{\log_2 a\}$, gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y .

a) $a = 5$, $x = \mathbf{25}$

b) $a = 3$, $x = \mathbf{36}$

c) $a = 11$, $x = \mathbf{121/4}$

d) $a = 7$, $x = \mathbf{49}$

6. Zapisać zbiór rozwiązań podanej nierówności w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów (nie używać różnicy zbiorów).

a) $\log_x(9/4) > -2$, $(\mathbf{0}, \mathbf{2/3}) \cup (\mathbf{1}, +\infty)$

b) $\log_x(9/4) < 1/2$, $(\mathbf{0}, \mathbf{1}) \cup (\mathbf{81/16}, +\infty)$

c) $\log_x(9/4) < -1/2$, $(\mathbf{16/81}, \mathbf{1})$

d) $\log_x(9/4) > 2$, $(\mathbf{1}, \mathbf{3/2})$

7. Funkcja f jest zdefiniowana wzorem $f(x) = \{\log_{27} x\}$, gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y . Zapisać zbiór wartości funkcji f na podanym przedziale w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów (nie używać różnicy zbiorów).

- a) $(3, 81), \quad [0, 1/3) \cup (1/3, 1)$
- b) $(9, 27\sqrt{3}), \quad [0, 1/6) \cup (2/3, 1)$
- c) $(1/3, \sqrt{3}), \quad [0, 1/6) \cup (2/3, 1)$
- d) $(27\sqrt[3]{3}, 81\sqrt{3}), \quad (1/9, 1/2)$

8. Dla podanych liczb m, n podać najmniejszą dodatnią miarę kąta α (w stopniach) spełniającą równanie $\sin(m\alpha) = \sin(n\alpha)$.

- a) $m = 5, \quad n = 13, \quad \alpha = \mathbf{10^\circ}$
- b) $m = 4, \quad n = 5, \quad \alpha = \mathbf{20^\circ}$
- c) $m = 3, \quad n = 7, \quad \alpha = \mathbf{18^\circ}$
- d) $m = 2, \quad n = 3, \quad \alpha = \mathbf{36^\circ}$

9. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC . Dla podanej miary kąta $\sphericalangle ABC$ podać miarę kąta wypukłego $\sphericalangle AOC$.

- a) $\sphericalangle ABC = 60^\circ, \quad \sphericalangle AOC = \mathbf{120^\circ}$
- b) $\sphericalangle ABC = 150^\circ, \quad \sphericalangle AOC = \mathbf{60^\circ}$
- c) $\sphericalangle ABC = 30^\circ, \quad \sphericalangle AOC = \mathbf{60^\circ}$
- d) $\sphericalangle ABC = 120^\circ, \quad \sphericalangle AOC = \mathbf{120^\circ}$

10. Rozważamy 40-kąt foremny $A_1A_2A_3\dots A_{40}$. Dla podanych liczb m, n podać zbiór wszystkich takich liczb całkowitych dodatnich $k \leq 40$, różnych od m, n , że trójkąt $A_mA_nA_k$ jest prostokątny.

a) $m = 1, \quad n = 2, \quad k \in \{21, 22\}$

b) $m = 20, \quad n = 21, \quad k \in \{1, 40\}$

c) $m = 11, \quad n = 22, \quad k \in \{2, 31\}$

d) $m = 17, \quad n = 29, \quad k \in \{9, 37\}$

11. Dla podanej liczby n podać takie liczby naturalne a, b, c **większe od 1**, że $n^n = a^{b^c}$. Potęgowanie wykonuje się *od góry*, tzn. $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.

a) $n = 45, \quad a = 45^5, \quad b = 3, \quad c = 2$

b) $n = 18, \quad a = 18^2 = 324, \quad b = 3, \quad c = 2$

c) $n = 20, \quad a = 20^5 = 3200000, \quad b = 2, \quad c = 2$

d) $n = 75, \quad a = 75^3, \quad b = 5, \quad c = 2$

12. Dla podanej liczby n podać takie liczby naturalne a, b, c **większe od 1**, że $n^n = a^{b^c}$, a przy tym liczba c jest możliwie **największa**.

a) $n = 36, \quad a = 6^9, \quad b = 2, \quad c = 3$

b) $n = 1600, \quad a = 40^{25}, \quad b = 2, \quad c = 7$

c) $n = 27, \quad a = 3, \quad b = 3, \quad c = 4$

d) $n = 72, \quad a = 72^9, \quad b = 2, \quad c = 3$

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

1. Po zmieszaniu 2015 litrów roztworu pewnej substancji o stężeniu 10% z 2015 litrami roztworu tejże substancji o stężeniu $p\%$, otrzymano roztwór o stężeniu $q\%$. Dla podanego q podać p .

a) $q = 20$, $p = \mathbf{30}$

b) $q = 50$, $p = \mathbf{90}$

c) $q = 30$, $p = \mathbf{50}$

d) $q = 40$, $p = \mathbf{70}$

2. Dla podanych liczb p, q podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego takie liczby wymierne dodatnie a, b , że liczba a stanowi $p\%$ iloczynu ab , a liczba b stanowi $q\%$ iloczynu ab .

a) $p = 25$, $q = 80$, $a = \mathbf{5/4}$, $b = \mathbf{4}$

b) $p = 40$, $q = 60$, $a = \mathbf{5/3}$, $b = \mathbf{5/2}$

c) $p = 20$, $q = 80$, $a = \mathbf{5/4}$, $b = \mathbf{5}$

d) $p = 25$, $q = 75$, $a = \mathbf{4/3}$, $b = \mathbf{4}$

3. Dla podanej liczby d podać zbiór wszystkich liczb całkowitych nieujemnych k o następującej własności:

Istnieje postęp arytmetyczny 61-wyrazowy o wyrazach całkowitych dodatnich, który ma dokładnie k wyrazów podzielnych przez d .

a) $d = 5$, $k \in \{\mathbf{0}, \mathbf{12}, \mathbf{13}, \mathbf{61}\}$

b) $d = 3$, $k \in \{\mathbf{0}, \mathbf{20}, \mathbf{21}, \mathbf{61}\}$

c) $d = 4$, $k \in \{\mathbf{0}, \mathbf{15}, \mathbf{16}, \mathbf{30}, \mathbf{31}, \mathbf{61}\}$

d) $d = 2$, $k \in \{\mathbf{0}, \mathbf{30}, \mathbf{31}, \mathbf{61}\}$

4. Dla podanej liczby d podać zbiór wszystkich liczb całkowitych nieujemnych k o następującej własności:

Istnieje postęp geometryczny 2015-wyrazowy o wyrazach całkowitych dodatnich, który ma dokładnie k wyrazów podzielnych przez d .

a) $d = 16$, $k \in \{0, \mathbf{2011}, \mathbf{2012}, \mathbf{2013}, \mathbf{2014}, \mathbf{2015}\}$

b) $d = 8$, $k \in \{0, \mathbf{2012}, \mathbf{2013}, \mathbf{2014}, \mathbf{2015}\}$

c) $d = 2$, $k \in \{0, \mathbf{2014}, \mathbf{2015}\}$

d) $d = 4$, $k \in \{0, \mathbf{2013}, \mathbf{2014}, \mathbf{2015}\}$

5. Dla podanej liczby a podać największą liczbę rzeczywistą $x < 100$ taką, że $\{\log_4 x\} = \{\log_2 a\}$, gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y .

a) $a = 5$, $x = \mathbf{25}$

b) $a = 3$, $x = \mathbf{36}$

c) $a = 7$, $x = \mathbf{49}$

d) $a = 11$, $x = \mathbf{121/4}$

6. Zapisać zbiór rozwiązań podanej nierówności w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów (nie używać różnicy zbiorów).

a) $\log_x(9/4) > -2$, $(\mathbf{0}, \mathbf{2/3}) \cup (\mathbf{1}, +\infty)$

b) $\log_x(9/4) < 1/2$, $(\mathbf{0}, \mathbf{1}) \cup (\mathbf{81/16}, +\infty)$

c) $\log_x(9/4) < -1/2$, $(\mathbf{16/81}, \mathbf{1})$

d) $\log_x(9/4) > 2$, $(\mathbf{1}, \mathbf{3/2})$

7. Funkcja f jest zdefiniowana wzorem $f(x) = \{\log_{27} x\}$, gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y . Zapisać zbiór wartości funkcji f na podanym przedziale w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów (nie używać różnicy zbiorów).

- a) $(27\sqrt[3]{3}, 81\sqrt{3})$, $(1/9, 1/2)$
- b) $(3, 81)$, $[0, 1/3) \cup (1/3, 1)$
- c) $(9, 27\sqrt{3})$, $[0, 1/6) \cup (2/3, 1)$
- d) $(1/3, \sqrt{3})$, $[0, 1/6) \cup (2/3, 1)$

8. Dla podanych liczb m, n podać najmniejszą dodatnią miarę kąta α (w stopniach) spełniającą równanie $\sin(m\alpha) = \sin(n\alpha)$.

- a) $m = 5$, $n = 13$, $\alpha = 10^\circ$
- b) $m = 4$, $n = 5$, $\alpha = 20^\circ$
- c) $m = 3$, $n = 7$, $\alpha = 18^\circ$
- d) $m = 2$, $n = 3$, $\alpha = 36^\circ$

9. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC . Dla podanej miary kąta $\sphericalangle ABC$ podać miarę kąta wypukłego $\sphericalangle AOC$.

- a) $\sphericalangle ABC = 150^\circ$, $\sphericalangle AOC = 60^\circ$
- b) $\sphericalangle ABC = 30^\circ$, $\sphericalangle AOC = 60^\circ$
- c) $\sphericalangle ABC = 60^\circ$, $\sphericalangle AOC = 120^\circ$
- d) $\sphericalangle ABC = 120^\circ$, $\sphericalangle AOC = 120^\circ$

10. Rozważamy 40-kąt foremny $A_1A_2A_3\dots A_{40}$. Dla podanych liczb m, n podać zbiór wszystkich takich liczb całkowitych dodatnich $k \leq 40$, różnych od m, n , że trójkąt $A_mA_nA_k$ jest prostokątny.

a) $m = 17, \quad n = 29, \quad k \in \{9, 37\}$

b) $m = 1, \quad n = 2, \quad k \in \{21, 22\}$

c) $m = 20, \quad n = 21, \quad k \in \{1, 40\}$

d) $m = 11, \quad n = 22, \quad k \in \{2, 31\}$

11. Dla podanej liczby n podać takie liczby naturalne a, b, c **większe od 1**, że $n^n = a^{b^c}$. Potęgowanie wykonuje się *od góry*, tzn. $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.

a) $n = 45, \quad a = 45^5, \quad b = 3, \quad c = 2$

b) $n = 75, \quad a = 75^3, \quad b = 5, \quad c = 2$

c) $n = 20, \quad a = 20^5 = 3200000, \quad b = 2, \quad c = 2$

d) $n = 18, \quad a = 18^2 = 324, \quad b = 3, \quad c = 2$

12. Dla podanej liczby n podać takie liczby naturalne a, b, c **większe od 1**, że $n^n = a^{b^c}$, a przy tym liczba c jest możliwie **największa**.

a) $n = 1600, \quad a = 40^{25}, \quad b = 2, \quad c = 7$

b) $n = 36, \quad a = 6^9, \quad b = 2, \quad c = 3$

c) $n = 72, \quad a = 72^9, \quad b = 2, \quad c = 3$

d) $n = 27, \quad a = 3, \quad b = 3, \quad c = 4$