

## Podzielność, cechy podzielności, liczby pierwsze, największy wspólny dzielnik, najmniejsza wspólna wielokrotność.

**Uwaga:** Przyjmujemy, że 0 nie jest liczbą naturalną, tzn. liczby naturalne są to liczby całkowite dodatnie.

### Ćwiczenia 6,8.10.2014

Osoby, które uzyskały na teście mniej niż 60 punktów, powinny przyjść na ćwiczenia. Pozostali mogą ograniczyć się do rozwiązywania tych zadań we własnym zakresie.

1. Sformułować uogólnione cechy podzielności (tzn. w postaci: liczba przy dzieleniu przez coś daje taką samą resztę, jaką daje ...) przez 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 16, 25, 50, 125, 32.

2. Sformułować cechy podzielności przez 6, 12, 24, 15, 45, 18, 36.

3. W liczbie 3?20000001?5 wpisać w miejsce obu znaków zapytania taką samą cyfrę tak, aby otrzymać liczbę podzielną przez 75. Podać wszystkie rozwiązania.

4. O liczbie naturalnej wiadomo, że jej suma cyfr jest równa 2013. Czy ta liczba może/musi być podzielna przez 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 25, 27, 45, 75?

5. To samo, jeżeli wiadomo, że suma cyfr jest równa 2014.

6. To samo, jeżeli wiadomo, że suma cyfr jest równa 2016.

7. O liczbie naturalnej wiadomo, że jej trzycyfrowa końcówka jest równa 120. Czy ta liczba może/musi być podzielna przez 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 25, 27, 45, 75?

8. To samo, jeżeli wiadomo, że trzycyfrowa końcówka jest równa 124.

9. To samo, jeżeli wiadomo, że trzycyfrowa końcówka jest równa 125.

10. Obliczyć  $\text{NWD}(24!, 24^{24})$ .

11. Obliczyć  $\text{NWW}(12^{12}, 18^{18})$ .

12. Niech  $a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^9$ ,  $b = 2^6 \cdot 3^{11} \cdot 5^5$ ,  $c = 2^{10} \cdot 3^3 \cdot 7^2$ .

Obliczyć  $\text{NWD}(a, b, c)$  oraz  $\text{NWW}(a, b, c)$ .

13. Niech  $a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 6^9$ ,  $b = 2^6 \cdot 3^{11} \cdot 4^5$ ,  $c = 2^{10} \cdot 3^3 \cdot 10^2$ .

Obliczyć  $\text{NWD}(a, b, c)$  oraz  $\text{NWW}(a, b, c)$ .

14. Ile zer końcowych ma liczba  $33!$  ?

15. Która liczba jest większa,  $2^{23} \cdot 18^{10}$  czy  $12^{15} \cdot 3^7$  ?

16. Obliczyć

a)  $\text{NWD}(254678914^{37}, 10^{43})$

b)  $\text{NWD}(472851364^{43}, 2^{50})$

c)  $\text{NWD}(100000008^{25}, 12^{16})$

d)  $\text{NWD}(100000011^{44}, 300^{300})$

e)  $\text{NWD}(200000004^{31}, 24^{24})$

f)  $\text{NWD}(18465210275^{44}, 10^{47})$

g)  $\text{NWD}(7771428426328^{60}, 14^{37})$

h)  $\text{NWD}(1122334455666^{50}, 44^{37})$

i)  $\text{NWD}(12468945716272^{29}, 14^{17}, 330^{23})$

j)  $\text{NWD}(1352263965789126^{44}, 26^{19}, 39^{22})$

**Ćwiczenia 7,9.10.2014**

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami. Na ćwiczeniach wyjaśnimy sobie trudności związane z tymi zadaniami.

**17.** Dane są liczby naturalne  $m, n$ . Wówczas dla dowolnej liczby naturalnej  $k$ , liczba  $k$  jest podzielna jednocześnie przez  $m$  oraz  $n$  wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzielna przez .....

Ponadto, jeżeli ....., to dla dowolnej liczby naturalnej  $k$ , liczba  $k$  jest podzielna jednocześnie przez  $m$  oraz  $n$  wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzielna przez  $mn$ .

**18.** Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne  $d$ , dla których prawdziwa jest następująca cecha podzielności przez  $d$ :

Dla dowolnej liczby naturalnej  $k$ , liczba  $k$  jest podzielna przez  $d$  wtedy i tylko wtedy, gdy liczba utworzona przez dwie ostatnie cyfry liczby  $k$  jest podzielna przez  $d$ .

**19.** Jakie reszty może dawać kwadrat liczby całkowitej przy dzieleniu przez 3? Przez 8? Przez 5?

**20.** Jakie reszty może dawać sześcian liczby całkowitej przy dzieleniu przez 7? Przez 9?

**21.** Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne  $n > 1$ , dla których liczba  $n^2 - 1$  jest pierwsza.

**22.** Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze  $p$ , dla których liczba  $3p + 1$  jest pierwsza.

**23.** Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze  $p$ , dla których liczba  $p^2 + 2$  jest pierwsza.

**24.** Czy istnieją liczby naturalne  $m, n$  spełniające równanie

$$6^m = 12^n ?$$

**25.** Czy istnieją liczby naturalne  $m, n, k$  spełniające równanie

$$6^m \cdot 12^n = 18^k ?$$

**26.** Czy istnieją liczby naturalne  $m, n, k$  spełniające równanie

$$18^m \cdot 24^n = 12^k ?$$

**27.** Wskazać takie liczby naturalne  $m, n$ , że

$$m^3 n^4 = 2^{11} \cdot 3^7 \cdot 5^{13}.$$

**28.** Ile zer końcowych ma liczba  $1000!$  ?

**29.** Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne  $d$  o następującej własności: Dla dowolnych liczb naturalnych  $m, n$ , jeżeli iloczyn  $mn$  jest podzielny przez 7, to co najmniej jedna z liczb  $m, n$  jest podzielna przez  $d$ .

**30.** To samo z liczbą 24 zamiast 7.

**31.** Dowieść, że liczba naturalna o sumie cyfr równej 47 nie może być ani kwadratem, ani sześcianem liczby całkowitej.

**32.** Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej  $n$  liczba  $n^2 - n$  jest parzysta, liczba  $n^3 - n$  jest podzielna przez 6, a liczba  $n^5 - n$  jest podzielna przez 30.

**Wskazówka:**  $n^5 - n = (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2) + \text{coś}$ .