

Ćwiczenia 13,15.10.2014

Osoby, które uzyskały na teście mniej niż 60 punktów, powinny przyjść na ćwiczenia. Pozostali mogą ograniczyć się do rozwiązania tych zadań we własnym zakresie.

33. Dla podanej liczby n wskazać największą liczbę całkowitą nieujemną k , dla której liczba n jest podzielna przez 4^k .

- a) $n = 1112854710^{25}$, $k = \dots$;
- b) $n = 1112854711^{16}$, $k = \dots$;
- c) $n = 285470004^{19}$, $k = \dots$;
- d) $n = 285470024^{21}$, $k = \dots$.

34. Dla podanej liczby n wskazać największą liczbę całkowitą nieujemną k , dla której liczba n jest podzielna przez 8^k .

- a) $n = 123456789200037^{37}$, $k = \dots$;
- b) $n = 123456789200038^{40}$, $k = \dots$;
- c) $n = 123456789200048^{45}$, $k = \dots$;
- d) $n = 123456789200060^{50}$, $k = \dots$.

35. Podać największy wspólny dzielnik liczb

- a) $\text{NWD}(20!, 21^3) = \dots$;
- b) $\text{NWD}(21!, 22^3) = \dots$;
- c) $\text{NWD}(22!, 23^3) = \dots$;
- d) $\text{NWD}(23!, 24^3) = \dots$.

36. Dla podanej liczby s podać największą liczbę całkowitą dodatnią d o następującej własności: Każda liczba całkowita dodatnia o sumie cyfr równej s jest podzielna przez d .

- a) $s = 15$, $d = \dots$;
- b) $s = 16$, $d = \dots$;
- c) $s = 17$, $d = \dots$;
- d) $s = 18$, $d = \dots$.

37. Dla podanej liczby k podać największą liczbę całkowitą dodatnią d o następującej własności: Każda liczba całkowita dodatnia o dwucyfrowej końcówce równej k jest podzielna przez d .

- a) $k = 15$, $d = \dots$;
- b) $k = 16$, $d = \dots$;
- c) $k = 17$, $d = \dots$;
- d) $k = 18$, $d = \dots$.

38. Podać największy wspólny dzielnik.

- a) $\text{NWD}(1234000050, 900) = \dots$;
- b) $\text{NWD}(1234000051, 900) = \dots$;
- c) $\text{NWD}(1234000052, 900) = \dots$;
- d) $\text{NWD}(1234000053, 900) = \dots$.

39. Podać największy wspólny dzielnik.

- a) $\text{NWD}(25!, 26^2) = \dots$;
- b) $\text{NWD}(26!, 27^2) = \dots$;
- c) $\text{NWD}(27!, 28^2) = \dots$;
- d) $\text{NWD}(28!, 29^2) = \dots$.

40. Podać największy wspólny dzielnik.

- a) $\text{NWD}(7!, 8^2) = \dots$;
- b) $\text{NWD}(8!, 9^2) = \dots$;
- c) $\text{NWD}(15!, 16^3) = \dots$;
- d) $\text{NWD}(24!, 25^3) = \dots$.

41. Dla podanej liczby n podać najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią k taką, że liczba nk jest kwadratem liczby całkowitej.

- a) $n = 2^{2010} \cdot 3^{2010} \cdot 5^{2013}$, $k = \dots$;
- b) $n = 2^{2011} \cdot 3^{2013} \cdot 5^{2014}$, $k = \dots$;
- c) $n = 2^{2012} \cdot 3^{2014} \cdot 5^{2015}$, $k = \dots$;
- d) $n = 2^{2013} \cdot 3^{2016} \cdot 5^{2016}$, $k = \dots$.

42. Dla podanej liczby n podać najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią k taką, że liczba nk jest sześcianem liczby całkowitej.

- a) $n = 2^{2010} \cdot 3^{2010} \cdot 5^{2013}$, $k = \dots$;
- b) $n = 2^{2011} \cdot 3^{2013} \cdot 5^{2014}$, $k = \dots$;
- c) $n = 2^{2012} \cdot 3^{2014} \cdot 5^{2015}$, $k = \dots$;
- d) $n = 2^{2013} \cdot 3^{2016} \cdot 5^{2016}$, $k = \dots$.

43. Dla podanej liczby n podać najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią k taką, że liczba nk jest sześcianem liczby całkowitej.

- a) $n = 12^{2014}$, $k = \dots$;
- b) $n = 12^{2015}$, $k = \dots$;
- c) $n = 12^{2016}$, $k = \dots$;
- d) $n = 12^{2017}$, $k = \dots$.

44. Dla podanej liczby n podać najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią k taką, że liczba nk jest czwartą potęgą liczby całkowitej.

- a) $n = 24^{2013}$, $k = \dots$;
- b) $n = 24^{2014}$, $k = \dots$;
- c) $n = 24^{2015}$, $k = \dots$;
- d) $n = 24^{2016}$, $k = \dots$.

45. Wypisać w kolejności rosnącej wszystkie takie liczby naturalne n , że

- a) $20 < n < 30$, a liczba n^n jest kwadratem liczby całkowitej
- b) $20 < n < 30$, a liczba n^n jest sześcianem liczby całkowitej
- c) $30 < n < 40$, a liczba n^n jest czwartą potęgą liczby całkowitej
- d) $30 < n < 40$, a liczba n^n jest piątą potęgą liczby całkowitej

46. Dla podanej liczby n podać największą liczbę całkowitą dodatnią d , dla której liczba $n!$ jest podzielna przez d^6 .

- a) $n = 10$, $d = \dots$;
- b) $n = 15$, $d = \dots$;
- c) $n = 20$, $d = \dots$;
- d) $n = 25$, $d = \dots$.

47. Podać największy wspólny dzielnik, gdzie $n!! = n(n-2)(n-4)\dots$ jest iloczynem liczb całkowitych dodatnich nie większych od n i będących tej samej parzystości, co n .

- a) $\text{NWD}(24!!, 25^2) = \dots$;
- b) $\text{NWD}(26!!, 27^2) = \dots$;
- c) $\text{NWD}(27!!, 28^2) = \dots$;
- d) $\text{NWD}(29!!, 30^2) = \dots$.

48. Dla podanej liczby naturalnej n podać największą liczbę naturalną k taką, że liczba n jest podzielna przez 125^k .

- a) $n = 20142014120142015^{11}$, $k = \dots$;
- b) $n = 20142014120142025^{22}$, $k = \dots$;
- c) $n = 20142014120142075^{33}$, $k = \dots$;
- d) $n = 20142014120142080^{44}$, $k = \dots$.

49. Dla podanej liczby d wskazać najmniejszą taką liczbę naturalną k , że dla dowolnych liczb naturalnych m, n zachodzi wyrażenie:

$$d^k | mn \Rightarrow (d^3 | m \vee d^4 | n).$$

Napisać **NIE**, gdy taka liczba k nie istnieje.

- a) $d = 8$, $k = \dots$;
- b) $d = 9$, $k = \dots$;
- c) $d = 10$, $k = \dots$;
- d) $d = 11$, $k = \dots$.

50. Dla podanej liczby naturalnej n wskazać liczbę naturalną $d < 100$, która jest dzielnikiem liczby n , a ponadto jest liczbą złożoną. Liczba n jest dziesięciocyfrowa, w jej zapisie dziesiętnym występuje 7 zer.

- a) $n = 1000000017$, $d = \dots$;
- b) $n = 1000000038$, $d = \dots$;
- c) $n = 1000000065$, $d = \dots$;
- d) $n = 1000000028$, $d = \dots$.

51. Rozważamy ciąg 3, 6, 12, 15, 21, 24, 30, 33, 39, 51, ..., w którym każdy kolejny wyraz powstaje z poprzedniego przez dodanie sumy cyfr. Wiadomo, że dla każdej pary poniższych liczb a , b w ciągu tym występuje dokładnie jedna liczba naturalna n spełniająca nierówności $a \leq n \leq b$. Wskazać tę liczbę.

- a) $a = 1305$, $b = 1310$, $n = \dots$;
- b) $a = 2005$, $b = 2010$, $n = \dots$;
- c) $a = 3005$, $b = 3010$, $n = \dots$;
- d) $a = 4005$, $b = 4010$, $n = \dots$.

52. Dla podanej liczby naturalnej n wskazać największą liczbę naturalną k , dla której liczba n jest podzielna przez 12^k .

- a) $n = 8^8 \cdot 9^9$, $k = \dots$;
- b) $n = 16^{16} \cdot 9^9$, $k = \dots$;
- c) $n = 8^8 \cdot 18^{18}$, $k = \dots$;
- d) $n = 16^{16} \cdot 18^{18}$, $k = \dots$.

53. Dla podanej liczby naturalnej n podać największą liczbę naturalną k , dla której prawdziwe jest następujące zdanie: Dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich a , b , jeżeli iloczyn ab jest podzielny przez n , to co najmniej jeden z czynników a , b jest podzielny przez k .

- a) $n = 2^9 \cdot 29$, $k = \dots$;
- b) $n = 3^7 \cdot 101$, $k = \dots$;
- c) $n = 3^5 \cdot 29$, $k = \dots$;
- d) $n = 5^5 \cdot 101$, $k = \dots$.

54. Dla podanej liczby naturalnej n podać największą liczbę naturalną k , dla której prawdziwe jest następujące zdanie: Dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich a , b , jeżeli iloczyn ab jest podzielny przez n , to co najmniej jeden z czynników a , b jest podzielny przez k .

- a) $n = 2^9 \cdot 33$, $k = \dots$;
- b) $n = 2^9 \cdot 36$, $k = \dots$;
- c) $n = 2^9 \cdot 62$, $k = \dots$;
- d) $n = 2^9 \cdot 82$, $k = \dots$.

55. Dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich m , n , k , jeżeli iloczyn mnk jest podzielny przez D , to co najmniej jeden z czynników m , n , k jest podzielny przez d . Dla podanej liczby D wskazać największą liczbę całkowitą dodatnią d , dla której powyższe zdanie jest prawdziwe.

- a) $D = 2^3 \cdot 3^2$, $d = \dots$;
- b) $D = 2^4 \cdot 3^3$, $d = \dots$;
- c) $D = 2^9 \cdot 3^4$, $d = \dots$;
- d) $D = 2^{11} \cdot 3^7$, $d = \dots$.

56. Podać największy wspólny dzielnik i najmniejszą wspólną wielokrotność liczb

- a) $\text{NWD}(140!, 210!) = \dots$;
- b) $\text{NWW}(140!, 210!) = \dots$;
- c) $\text{NWD}(125!, 145!, 150!) = \dots$;
- d) $\text{NWW}(125!, 145!, 150!) = \dots$.

Ćwiczenia 14,16.10.2014

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami. Na ćwiczeniach wyjaśnimy sobie trudności związane z tymi zadaniami.

57. Połączyć podane warunki w grupy warunków równoważnych dla dowolnej liczby naturalnej n .

- a) liczba n jest nieparzysta
- b) liczba n jest względnie pierwsza z 6
- c) jedna z liczb $n-1$, $n+1$ jest podzielna przez 4
- d) jedna z liczb $n-1$, $n+1$ jest podzielna przez 6
- e) jedna z liczb $n-1$, $n+1$ jest podzielna przez 8
- f) liczba n^2-1 jest podzielna przez 4
- g) liczba n^2-1 jest podzielna przez 8
- h) liczba n^2-1 jest podzielna przez 12
- i) liczba n^2-1 jest podzielna przez 16
- j) liczba n^2-1 jest podzielna przez 24

58. Dowieść, że w ciągu 1, 2, 4, 8, 16, 23, 28, ..., w którym każdy kolejny wyraz powstaje z poprzedniego przez dodanie sumy cyfr, nie występuje liczba 2013.

59. Niech $n!! = n(n-2)(n-4)\dots$ będzie iloczynem liczb naturalnych nie większych od n i będących tej samej parzystości, co n . Ile zer końcowych mają liczby $34!!$ oraz $35!!$?

60. Wskazać najmniejszą (o ile taka w ogóle istnieje) liczbę naturalną k , dla której podane wyrażenie jest prawdziwe dla dowolnych liczb naturalnych m , n i (ewentualnie) r .

- a) $3^k | mn \Rightarrow (3^3 | m \vee 3^3 | n)$
- b) $5^k | mn \Rightarrow (5^2 | m \vee 5^7 | n)$
- c) $7^k | mnr \Rightarrow (7^5 | m \vee 7^3 | n \vee 7^{12} | r)$
- d) $4^k | mnr \Rightarrow (4^5 | m \vee 4^3 | n \vee 4^{12} | r)$
- e) $6^k | mnr \Rightarrow (6^5 | m \vee 6^3 | n \vee 6^{12} | r)$

61. Uporządkować podane liczby w kolejności rosnącej

$$a = 90 \cdot 60^9, \quad b = 15^3 \cdot 120^7, \quad c = 2^7 \cdot 30^{11}, \quad d = 60^{10}$$

$$e = 40^6 \cdot 45^5, \quad f = 72^6 \cdot 5^{10}, \quad g = 5^{11} \cdot 50000^2$$

62. Pani napisała na tablicy pewną liczbę naturalną. Troje uczniów spostrzegło i wypowiedziało pewne własności napisanej liczby. Niestety, tylko dwóch uczniów podało własności poprawne, a trzeci uczeń się pomylił. Który uczeń popełnił błąd?

Wersja I

Pankracy: Napisana liczba jest kwadratem liczby całkowitej.

Serwacy: Suma cyfr napisanej liczby jest równa 38.

Bonifacy: Napisana liczba przy dzieleniu przez 9 daje resztę 2.

Wersja II

Pankracy: Napisana liczba jest kwadratem liczby całkowitej.

Serwacy: Suma cyfr napisanej liczby jest równa 32.

Bonifacy: Napisana liczba przy dzieleniu przez 9 daje resztę 7.

Wersja III

Pankracy: Napisana liczba jest kwadratem liczby całkowitej.

Serwacy: Suma cyfr napisanej liczby jest równa 19.

Bonifacy: Napisana liczba przy dzieleniu przez 9 daje resztę 3.

Wersja IV

Pankracy: Napisana liczba jest kwadratem liczby całkowitej.

Serwacy: Suma cyfr napisanej liczby jest równa 2004.

Bonifacy: Napisana liczba kończy się cyframi 2005.

Wersja V

Pankracy: Napisana liczba jest sześcianem liczby całkowitej.

Serwacy: Napisana liczba kończy się cyframi 444.

Bonifacy: Napisana liczba jest nieparzysta.

Wersja VI

Pankracy: Napisana liczba jest sześcianem liczby całkowitej.

Serwacy: Napisana liczba kończy się cyframi 2222.

Bonifacy: Suma cyfr napisanej liczby jest równa 43.

63. W miejsce kropek wstawić największą/najmniejszą (cokolwiek jest sensowne) liczbę, przy której podana implikacja jest prawdziwa dla dowolnej liczby naturalnej n

a) $24|n^2 \Rightarrow \dots\dots|n^2$

b) $18|n^3 \Rightarrow \dots\dots|n^3$

c) $60|n^5 \Rightarrow \dots\dots|n^5$

d) $n^2|24 \Rightarrow n^2|\dots\dots$

e) $n^3|10! \Rightarrow n^3|\dots\dots$

f) $54|n^2 \Rightarrow \dots\dots|n^3$

g) $n^5|12^8 \Rightarrow n|\dots\dots$

h) $8^8|n^{10} \Rightarrow \dots\dots|n$

64. Wiadomo, że wśród następujących sześciu liczb

$$3465^2 - 2, \quad 3465^2 - 4, \quad 3465^2 - 8, \quad 3465^2 - 16, \quad 3465^2 - 32, \quad 3465^2 - 64$$

trzy są pierwsze, a trzy złożone. Które z podanych liczb są pierwsze?

65. Na potrzeby tego zadania, liczbę naturalną k nazwiemy *ładną*, jeżeli istnieje liczba naturalna, której kwadrat ma sumę cyfr równą k . Wiadomo, że wśród 11 kolejnych liczb naturalnych od 3010 do 3020 dokładnie 5 jest *ładnych*. Które z podanych liczb są *ładne*?

66. Na potrzeby tego zadania, liczbę naturalną k nazwiemy *fajną*, jeżeli istnieje liczba naturalna, której sześcian ma sumę cyfr równą k . Wiadomo, że wśród 11 kolejnych liczb naturalnych od 3010 do 3020 dokładnie 3 są *fajne*. Które z podanych liczb są *fajne*?

67. Dana jest liczba naturalna n . Niech D będzie zbiorem wszystkich dzielników naturalnych liczby n , a W zbiorem jej wszystkich wielokrotności. Czemu jest równa podana liczba, o ile istnieje?

- a) Największy wspólny dzielnik wszystkich liczb ze zbioru D .
- b) Najmniejsza wspólna wielokrotność wszystkich liczb ze zbioru D .
- c) Największy wspólny dzielnik wszystkich liczb ze zbioru W .
- d) Najmniejsza wspólna wielokrotność wszystkich liczb ze zbioru W .

68. Dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich m, n , jeżeli iloczyn mn jest podzielny przez d , to co najmniej jeden z czynników m, n jest podzielny przez d .

Dla których liczb naturalnych d powyższe zdanie jest prawdziwe?

69. Dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich m, n , jeżeli iloczyn mn jest podzielny przez d^2 , to co najmniej jeden z czynników m, n jest podzielny przez d .

Dla których liczb naturalnych d powyższe zdanie jest prawdziwe?

70. Dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich m, n, k , jeżeli iloczyn mnk jest podzielny przez d^2 , to co najmniej jeden z czynników m, n, k jest podzielny przez d .

Dla których liczb naturalnych d powyższe zdanie jest prawdziwe?