

Ćwiczenia 20.10.2014

Powtórka przed sprawdzianem nr 1.

**Wzory skróconego mnożenia, dwumian Newtona, procenty.
Postęp arytmetyczny i geometryczny.**

Ćwiczenia 21,23,28.10.2014**Sprawdzian nr 1: 21.10.2014, godz. 8:15-8:40 (materiał zad. 1-70)**

Zadania ze sprawdzianu zostaną omówione na ćwiczeniach bezpośrednio po sprawdzianie.

Poniższe zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami. Na ćwiczeniach wyjaśnimy sobie trudności związane z tymi zadaniami.

71. Dowieść, że iloczyn dowolnych czterech kolejnych liczb naturalnych powiększony o jeden jest kwadratem liczby całkowitej.

72. Uporządkować podane liczby w kolejności rosnącej. Nie używać kalkulatora!!!

$$a = 3, \quad b = \sqrt{7 + \sqrt{10}}, \quad c = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}, \quad d = \sqrt{10}, \quad e = \sqrt{2} + \sqrt{3}, \quad f = \sqrt{5 + 3\sqrt{2}}.$$

73. Uprościć wyrażenia

a)
$$\frac{1}{5 - 2\sqrt{6}} + 2\sqrt{6}$$

b)
$$\sqrt{(1 - \sqrt{2})^6}$$

c)
$$(2^{2007} - 1) \cdot (2^{2007} + 1)$$

d)
$$(3^{669} - 1) \cdot (9^{669} + 3^{669} + 1)$$

e)
$$\frac{2^{2007} + 1}{2^{669} + 1}$$

74. Uzupełnić wzory skróconego mnożenia. Kropki występujące po lewej stronie równości zastąpić pojedynczym znakiem.

a) $(x + 2)^2 = x^2 + \dots$

b) $a^3 + b^3 = (a + b) \cdot \dots$

c) $a^3 - b^3 = (a - b) \cdot \dots$

d) $a^3 \dots b^3 = (a^2 + ab + b^2) \cdot \dots$

e) $a^4 \dots b^4 = (a + b) \cdot \dots$

f) $a^4 \dots b^4 = (a - b) \cdot \dots$

g) $a^5 \dots b^5 = (a + b) \cdot \dots$

h) $a^5 \dots b^5 = (a - b) \cdot \dots$

i) $(a + b)^3 = a^3 + 3 \dots$

j) $(a - b)^4 = a^4 - \dots$

k) $(a - b)^5 = a^5 - \dots$

l) $a^n - b^n = (a - b) \cdot \dots$

m) $a^n + b^n = (a + b) \cdot \dots$ - dla których n ?

n) $a^n - b^n = (a + b) \cdot \dots$ - dla których n ?

o) $a^n + b^n = (a^2 + b^2) \cdot \dots$ - dla których n ?

p) $a^n - b^n = (a^2 + b^2) \cdot \dots$ - dla których n ?

75. Dla podanej liczby wskazać jej **nieparzysty** dzielnik pierwszy mniejszy od 100.

- a) $2^{21} - 1$,
- b) $3^{21} - 1$,
- c) $3^{51} - 2^{51}$,
- d) $3^{51} + 1$,

76. Dla podanej liczby wskazać jej **dwucyfrowy** dzielnik pierwszy.

- a) $2^{25} - 1$,
- b) $2^{25} + 1$,
- c) $3^{25} - 1$,
- d) $3^{25} + 1$,

Uwaga: Przyjmujemy, że w postępie geometrycznym wszystkie wyrazy są różne od zera.

77. Drugi, piąty i dziesiąty wyraz pewnego postępu arytmetycznego tworzą postęp geometryczny trójwyrazowy. Jaki jest iloraz tego postępu geometrycznego?

78. Obliczyć

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{27} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{2187},$$

gdzie w mianownikach znajdują się potęgi dwójki i trójki ustawione rosnąco.

79. Dla których liczb naturalnych $n \geq 3$ prawdziwe jest następujące twierdzenie?

W dowolnym postępie arytmetycznym n -wyrazowym o sumie 0 co najmniej jeden z wyrazów jest równy 0.

80. Suma wyrazów dowolnego postępu arytmetycznego n -wyrazowego $a_1, a_2, \dots, a_n$ jest równa $\frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$. Dla podanej liczby k wskazać takie n , aby powyższe zdanie było prawdziwe.

- a) $k = 3$, $n = \dots$;
- b) $k = 5$, $n = \dots$;
- c) $k = 7$, $n = \dots$;
- d) $k = 10$, $n = \dots$.

81. Podać liczbę całkowitą dodatnią n , dla której prawdziwe jest następujące twierdzenie: W dowolnym postępie arytmetycznym n wyrazowym $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ suma wyrazów jest równa

- a) $n \cdot a_5$ – dla $n = \dots$;
- b) $n \cdot \frac{a_4 + a_7}{2}$ – dla $n = \dots$;
- c) $n \cdot (2a_{12} - a_{11})$ – dla $n = \dots$;
- d) $n \cdot \frac{a_{10} + a_{12}}{2}$ – dla $n = \dots$.

82. Dla podanej liczby n podaj największą liczbę naturalną d o następującej własności: Dowolny postęp arytmetyczny n -wyrazowy o wyrazach całkowitych ma sumę wyrazów podzielną przez d .

- a) $n = 2013$, $d = \dots$;
- b) $n = 2014$, $d = \dots$;
- c) $n = 2015$, $d = \dots$;
- d) $n = 2016$, $d = \dots$.

83. Suma wyrazów dowolnego postępu arytmetycznego n -wyrazowego $a_1, a_2, \dots, a_n$ jest równa $n \cdot a_k$. Dla podanej liczby k wskazać takie n , aby powyższe zdanie było prawdziwe.

- a) $k = 3$, $n = \dots$;
- b) $k = 5$, $n = \dots$;
- c) $k = 7$, $n = \dots$;
- d) $k = 10$, $n = \dots$.

84. Suma wyrazów dowolnego postępu arytmetycznego n -wyrazowego $a_1, a_2, \dots, a_n$ jest równa $\frac{n \cdot (a_k + a_{2k})}{2}$. Dla podanej liczby k wskazać takie n , aby powyższe zdanie było prawdziwe.

- a) $k = 3$, $n = \dots$;
- b) $k = 5$, $n = \dots$;
- c) $k = 7$, $n = \dots$;
- d) $k = 10$, $n = \dots$.

85. W dowolnym rosnącym postępie arytmetycznym 2013-wyrazowym o wyrazach dodatnich, w którym wyrazy drugi, czwarty i siódmy tworzą rosnący postęp geometryczny, także wyrazy m -ty, n -ty i k -ty tworzą (w tej właśnie kolejności) rosnący postęp geometryczny. Uzupełnij podane liczby tak, aby powyższe zdanie było prawdziwe.

Wpisz **NIE**, jeżeli uważasz, że takie liczby nie istnieją.

- a) $m = 3$, $n = \dots$, $k = \dots$;
- b) $m = \dots$, $n = 5$, $k = \dots$;
- c) $m = \dots$, $n = \dots$, $k = 8$;
- d) $m = \dots$, $n = 8$, $k = \dots$.

86. W dowolnym rosnącym postępie arytmetycznym 2013-wyrazowym o wyrazach dodatnich, w którym wyrazy drugi, czwarty i siódmy tworzą rosnący postęp geometryczny, także wyrazy m -ty, n -ty i k -ty tworzą (w tej właśnie kolejności) rosnący postęp geometryczny. Uzupełnij podane liczby tak, aby powyższe zdanie było prawdziwe.

Wpisz **NIE**, jeżeli uważasz, że takie liczby nie istnieją.

- a) $m = 2$, $n = 14$, $k = \dots$;
- b) $m = 2$, $n = 6$, $k = \dots$;
- c) $m = 2$, $n = \dots$, $k = 14$;
- d) $m = 3$, $n = 98$, $k = \dots$.

Na przykład liczba 1001 jest liczbą numer 4 w wierszu numer 14. Liczbę stojącą zgodnie z taką numeracją w n -tym wierszu na k -tej pozycji oznaczmy przez $\binom{n}{k}_{TP}$.

Definicja 2. (kombinatoryczna) Przez $\binom{n}{k}_K$ oznaczmy liczbę k -elementowych podzbiorów zbioru n -elementowego.

Definicja 3. (wzór z silniami) Przyjmiemy

$$\binom{n}{k}_W = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

89. Wykaż, że podane wyżej trzy definicje są równoważne, to znaczy

$$\binom{n}{k}_{TP} = \binom{n}{k}_K = \binom{n}{k}_W.$$

90. Udowodnij, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n liczba $(2n)!$ jest podzielna przez $(n!)^2$.

91. Uporządkuj w kolejności niemalejącej liczby

$$\binom{2014}{107}, \quad \binom{2014}{407}, \quad \binom{2014}{707}, \quad \binom{2014}{1007}, \quad \binom{2014}{1307}, \quad \binom{2014}{1707}.$$

92. Znajdź w wydrukowanym fragmencie trójkąta Pascala trzy liczby występujące kolejno w jednym wierszu i tworzące rosnący postęp arytmetyczny. Ile takich trójek liczb występuje w całym trójkącie Pascala?

93. A ile jest trójek liczb występujących kolejno w jednym wierszu trójkąta Pascala i tworzących postęp geometryczny?

94. Niech p będzie liczbą pierwszą oraz niech $0 < k < p$. Udowodnij, że liczba $\binom{p}{k}$ jest podzielna przez p .

95. Udowodnij, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\binom{2n+2}{n+1} < 4 \cdot \binom{2n}{n}.$$

96. Udowodnij, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\binom{3n+3}{n+1} < 7 \cdot \binom{3n}{n}.$$

97. Znajdź w wydrukowanym fragmencie trójkąta Pascala takich pięć liczb występujących kolejno na początku jednego wiersza, że każda (oprócz pierwszej) jest wielokrotnością poprzedniej. Jak długie ciągi takich liczb występują w całym trójkącie Pascala?

98. Jeżeli liczba całkowita dodatnia m jest większa od liczby całkowitej dodatniej n o $p\%$, to liczba n jest mniejsza od m o $q\%$. Dla podanej liczby p podać taką liczbę q , aby powyższe zdanie było prawdziwe

- a) $p = 150$, $q = \dots\dots\dots$;
- b) $p = 300$, $q = \dots\dots\dots$;
- c) $p = 400$, $q = \dots\dots\dots$;
- d) $p = 900$, $q = \dots\dots\dots$.

99. Dla podanej liczby k podać taką liczbę naturalną $n \geq k$, że

$$\binom{n}{k+1} = k \cdot \binom{n}{k}$$

- a) $k=2$, $n=$;
 b) $k=3$, $n=$;
 c) $k=4$, $n=$;
 d) $k=5$, $n=$

100. Dla podanej liczby wskazać jej **dwucyfrowy** dzielnik pierwszy.

- a) $26^7 + 3^7$,;
 b) $26^7 - 3^7$,;
 c) $48^7 - 5^{14}$,;
 d) $48^7 + 5^{14}$,

101. Dla podanej liczby wskazać jej **dwucyfrowy** dzielnik pierwszy.

- a) $36^{14} - 11^{14}$,;
 b) $7^6 + 2^{12}$,;
 c) $26^6 - 21^6$,;
 d) $6^6 + 5^6$,

102. Wiedząc, że $\binom{14}{4} = 1001$, $\binom{14}{5} = 2002$, $\binom{14}{6} = 3003$, podać wartość współczynnika dwumianowego

- a) $\binom{15}{5} =$;
 b) $\binom{15}{6} =$;
 c) $\binom{16}{6} =$;
 d) $\binom{15}{10} =$

103. Dla podanych n, k , wskazać takie $m > k$, aby prawdziwa była równość

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{m}$$

Jeśli uważasz, że takiego m nie ma, napisz: *nie istnieje*.

- a) $n=1000$, $k=200$, $m=$;
 b) $n=1500$, $k=300$, $m=$;
 c) $n=2000$, $k=400$, $m=$;
 d) $n=2013$, $k=500$, $m=$

104. Dla podanych liczb a oraz k wskazać taką liczbę naturalną n , aby zachodziła równość

$$(a^{a^k})^{a^{a^k}} = a^{a^n}.$$

- a) $a=5, k=2, n=.....$;
- b) $a=3, k=3, n=.....$;
- c) $a=2, k=5, n=.....$;
- d) $a=3, k=4, n=.....$.

105. Jeżeli liczba m jest większa od liczby n o $p\%$, to największy wspólny dzielnik liczb m, n stanowi $q\%$ liczby n . Dla podanej liczby p podać liczbę q .

- a) $p=10, q=.....$;
- b) $p=20, q=.....$;
- c) $p=30, q=.....$;
- d) $p=40, q=.....$.

106. Jeżeli liczba m jest większa od liczby n o $p\%$, to najmniejsza wspólna wielokrotność liczb m, n jest większa o $q\%$ od liczby n . Dla podanej liczby p podać liczbę q .

- a) $p=10, q=.....$;
- b) $p=20, q=.....$;
- c) $p=30, q=.....$;
- d) $p=40, q=.....$.

107. W dowolnym postępie arytmetycznym n -wyrazowym $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ o sumie 120 i jednym z wyrazów równym 15, co najmniej jeden z wyrazów jest równy w .

Dla podanej liczby n podać wszystkie liczby $w \neq 15$, dla których powyższe zdanie jest prawdziwe. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczba w o żądanej własności nie istnieje.

- a) $n=6, w=.....$;
- b) $n=8, w=.....$;
- c) $n=12, w=.....$;
- d) $n=15, w=.....$.

108. Dla podanej liczby n podać przykład rosnącego postępu arytmetycznego n -wyrazowego o sumie wyrazów równej n^2 , w którym występuje wyraz równy 1.

- a) $n=3,;$
- b) $n=4,;$
- c) $n=5,;$
- d) $n=7,;$

109. Suma wyrazów dowolnego postępu arytmetycznego 15-wyrazowego $a_1, a_2, \dots, a_{15}$ jest równa $5(a_m + a_n + a_k)$. Dla podanych m, n wskazać taką liczbę naturalną k , aby powyższe zdanie było prawdziwe.

- a) $m=1, n=10, k=.....$;
- b) $m=3, n=9, k=.....$;
- c) $m=6, n=8, k=.....$;
- d) $m=7, n=10, k=.....$.

Ćwiczenia 3.11.2014 — Powtórka przed kolokwium nr 1.

Kolokwium nr 1: 4.11.2014, godz. 8:15-10:00 (materiał zad. 1-109)