

Wartość bezwzględna, potęgowanie i pierwiastkowanie - rozwiązywanie równań i nierówności.

Ćwiczenia 5.11.2014 (środa)

Osoby, które uzyskały łącznie mniej niż 80 punktów (50%) na sprawdzianie nr 1 i kolokwium nr 1, powinny przyjść na ćwiczenia. Pozostali mogą ograniczyć się do rozwiązania zadań we własnym zakresie.

Zaczynamy od omówienia kolokwium nr 1.

110. Zapisać zbiór rozwiązań podanej nierówności w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów (nie używać różnicy zbiorów).

- a) $(x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) > 0$,
- b) $(x-1)^2 \cdot (x-2) \cdot (x-3) > 0$,
- c) $(x-1) \cdot (x-2)^2 \cdot (x-3) > 0$,
- d) $(x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3)^2 > 0$,

111. Zapisać zbiór rozwiązań podanej nierówności w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów (nie używać różnicy zbiorów).

- a) $(x-1)^{2013} \cdot (x-2)^{2013} > 0$,
- b) $(x-1)^{2013} \cdot (x-2)^{2014} > 0$,
- c) $(x-1)^{2014} \cdot (x-2)^{2013} > 0$,
- d) $(x-1)^{2014} \cdot (x-2)^{2014} > 0$,

112. Zapisać zbiór rozwiązań podanej nierówności w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów (nie używać różnicy zbiorów).

- a) $(|x|-1)^{2013} \cdot (|x|-2)^{2013} > 0$,
- b) $(|x|-1)^{2013} \cdot (|x|-2)^{2014} > 0$,
- c) $(|x|-1)^{2014} \cdot (|x|-2)^{2013} > 0$,
- d) $(|x|-1)^{2014} \cdot (|x|-2)^{2014} > 0$,

113. Zapisać zbiór rozwiązań podanej nierówności w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów (nie używać różnicy zbiorów).

- a) $|x-3| < 1$,
- b) $|x-4| > 2$,
- c) $|x-5| > 6$,
- d) $|x-6| < 5$,

114. Zapisać zbiór rozwiązań podanej nierówności w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów (nie używać różnicy zbiorów).

- a) $|x^2 - 17| < 8$,
- b) $|x^3 - 14| < 13$,
- c) $|x^4 - 40| < 41$,
- d) $|x^5 - 16| < 16$,

115. Zapisać zbiór rozwiązań podanej nierówności w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów (nie używać różnicy zbiorów).

- a) $(x-1)(x-2) < 0$, ;
 b) $(x-2)(x-4)^2 < 0$, ;
 c) $(x-4)^2(x-7) < 0$, ;
 d) $(x-7)^2(x-9)^2 > 0$,

116. Zapisać zbiór rozwiązań podanej nierówności w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów (nie używać różnicy zbiorów).

- a) $(x^2-1)(x-2) < 0$, ;
 b) $(x-2)(x^2-4) < 0$, ;
 c) $(x^2-4)(x-7)^2 < 0$, ;
 d) $(x-7)(x^2-9)^2 < 0$,

117. Zapisać zbiór rozwiązań podanej nierówności w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów (nie używać różnicy zbiorów).

- a) $(x-4)(x-9) > 0$, ;
 b) $(x-4)(x^2-9) > 0$, ;
 c) $(x^2-4)(x-9) > 0$, ;
 d) $(x^2-4)(x^2-9) > 0$,

118. Zapisać zbiór rozwiązań podanej nierówności w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów (nie używać różnicy zbiorów).

- a) $(x^2-25) \cdot (x^3-27) > 0$, ;
 b) $(x^5-32) \cdot (x^3-27) > 0$, ;
 c) $(x^5-32) \cdot (x^4-16) > 0$, ;
 d) $(x^2-25) \cdot (x^4-16) > 0$,

Ćwiczenia 6.11.2014 (czwartek)

119. Rozwiązać nierówności

- a) $\sqrt{x+2}\sqrt{x-2} < \sqrt{x^2-1}$
 b) $\sqrt{x^2+27} > 2x$
 c) $x^2 \geq \frac{1}{x}$
 d) $x^3 \geq \frac{1}{x}$
 e) $x(x^2+8x^8) \leq x(x^2+x^8)$
 f) $\sqrt{4x-4-x^2} \leq x^{2007} + 2007$
 g) $\sqrt{x^2+2007} \leq \sqrt{3x^2+1999}$
 h) $|||||x|-1|-1|-1|-1|-1| \leq \frac{1}{2}$
 i) $\sqrt{x^2-2x+1} + \sqrt{x^2-4x+4} < \sqrt{x^2+2x+1} + \sqrt{x^2-8x+16}$
 j) $|x^2-25| < 24$

$$\textbf{k)} (x+5)^{2007} + (x+5)^3 < (3x+1)^{2007} + (3x+1)^3$$

$$\textbf{l)} (x^2+1)^{x+2} \leq (x^2+1)^{x^2}$$

Szacowanie wyrażeń.

Ćwiczenia 12.11.2014 (środa)

Osoby, które uzyskały łącznie mniej niż 80 punktów (50%) na sprawdzianie nr 1 i kolokwium nr 1, powinny przyjść na ćwiczenia. Pozostali mogą ograniczyć się do rozwiązania zadań we własnym zakresie.

120. Która z liczb jest większa

$$\textbf{a)} 123456 \cdot 123458 \text{ czy } 123457^2$$

$$\textbf{b)} 1000! \text{ czy } 1000^{1000}$$

$$\textbf{c)} 1000! \text{ czy } 100^{900}$$

$$\textbf{d)} 1000! \text{ czy } (500!)^2$$

$$\textbf{e)} \binom{2007}{666}^{2007} \text{ czy } \binom{2007}{666}^{666}$$

$$\textbf{f)} (\sqrt[4]{83}-2)^{2007} \text{ czy } (\sqrt[4]{83}-2)^{666}$$

$$\textbf{g)} (\sqrt[4]{79}-2)^{2007} \text{ czy } (\sqrt[4]{79}-2)^{666}$$

$$\textbf{h)} (\sqrt[4]{79}-3)^{2007} \text{ czy } (\sqrt[4]{79}-3)^{666}$$

$$\textbf{i)} (\sqrt[4]{79}-3)^{2007} \text{ czy } (\sqrt[4]{79}-3)^{667}$$

$$\textbf{j)} 2^{100!} \text{ czy } 9^{99!}$$

$$\textbf{k)} 2^{1000} \text{ czy } 3^{700}$$

$$\textbf{l)} 5^{444} \text{ czy } 3^{700}$$

$$\textbf{m)} \frac{17}{20} \text{ czy } \frac{16}{21}$$

$$\textbf{n)} \frac{100}{7} \text{ czy } \frac{150}{11}$$

$$\textbf{o)} \frac{8^{444}}{17^{17}} \text{ czy } \frac{16^{333}}{19^{17}}$$

$$\textbf{p)} \frac{17^{667}}{3333^4 + 6666^4} \text{ czy } \frac{17^{666}}{3333^4}$$

$$\textbf{q)} \binom{2007}{666} \text{ czy } \binom{2007}{667}$$

$$\textbf{r)} \binom{2007}{666} \text{ czy } \binom{2008}{666}$$

$$\textbf{s)} \binom{2007}{1666} \text{ czy } \binom{2007}{1667}$$

- t) $\binom{2007}{1666}$ czy $\binom{2008}{1666}$
 u) $\frac{1}{\sqrt{37}-6}$ czy $\sqrt{37}+6$
 v) $\frac{1}{\sqrt{37}-6}$ czy 12
 w) $\frac{1}{\sqrt{37}-6}$ czy $\frac{1}{\sqrt{97}-10}$
 x) $\sqrt{37}-6$ czy $\frac{1}{10}$
 y) $(\sqrt{37}-6)^{666}$ czy $\frac{1}{100^{100}}$
 z) $\left(\frac{9}{4}\right)^{27/8}$ czy $\left(\frac{27}{8}\right)^{9/4}$

Logarytmy

Ćwiczenia 13,18.11.2014 (czwartek, wtorek)

Uprościć wyrażenia

121. $4^{2+\log_2 7}$
 122. $\log_{\sqrt{3}} 2 \cdot \log_5 9$
 123. $\log_6 2 + \log_{36} 9$
 124. $\frac{\log_m(mn) \cdot \log_n(mn)}{\log_m(mn) + \log_n(mn)}$ dla liczb naturalnych m i n większych od 1.
 125. $\log_{(\sqrt{2}-1)}(\sqrt{2}+1)$
 126. $2^{\log_3 5} - 5^{\log_3 2}$

127. Dla ilu trójek liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c różnych od 1 spełniona jest podana równość? Dla wszystkich? Dla żadnej? Dla niektórych (podać 3 przykłady, a jeśli przykładów jest mniej niż 3, podać wszystkie)?

- a) $\log_a(bc) = (\log_a b) + \log_a c$
 b) $\log_a(bc) = (\log_a b) \cdot \log_a c$
 c) $\log_a(b+c) = (\log_a b) \cdot \log_a c$
 d) $\log_a(b+c) = (\log_a b) + \log_a c$
 e) $(\log_a b) \cdot \log_b c = \log_a c$
 f) $\log_a(b^c) = c \cdot \log_a b$

128. Bez użycia kalkulatora rozstrzygnąć, która liczba jest większa:

- a) $\log_2 7$ czy $\log_3 7$
 b) $\log_{0,2} 7$ czy $\log_{0,3} 7$
 c) $\log_2 7$ czy $\log_{0,3} 7$
 d) $\log_{0,2} 7$ czy $\log_3 7$
 e) $\log_2 0,7$ czy $\log_3 0,7$
 f) $\log_{0,2} 0,7$ czy $\log_{0,3} 0,7$
 g) $\log_2 0,7$ czy $\log_{0,3} 0,7$

- h) $\log_{0,2} 0,7$ czy $\log_3 0,7$
- i) $\log_9 27$ czy $\log_4 8$
- j) $\log_3 8$ czy $\log_2 5$
- k) $\log_5 127$ czy $\log_{10} 999$
- l) $\log_3 100$ czy $\log_2 10$
- m) $(\log_2 3) \cdot \log_5 7$ czy $(\log_2 7) \cdot \log_5 3$
- n) $(\log_2 3) \cdot \log_7 5$ czy $(\log_7 9) \cdot \log_{16} 25$
- o) $\log_2 3$ czy $\log_3 5$
- p) $\log_3 7$ czy $\log_5 19$
- q) $\log_2 3$ czy $\log_5 13$
- r) $\log_3 5$ czy $\log_{15} 56$

Wskazówka do kilku ostatnich pytań:

Wiadomo, że wartość ułamka nie zmienia się, jeżeli licznik i mianownik pomnożymy przez tę samą liczbę różną od zera.

Podobnie, wartość logarytmu nie zmienia się, jeżeli podstawę i liczbę logarytmowaną

129. Czy jest prawdą, że $\log_2(a+b) = \log_2 a + \log_2 b$, jeżeli

- a) $a = 2, b = 2$
- b) $a = 3/2, b = 3$
- c) $a = 2, b = 3$
- d) $a = 3/2, b = 2$
- e) $a = 5, b = 5/4$

130. Czy jest prawdą, że $a \cdot \log_7 b = b \cdot \log_7 a$, jeżeli

- a) $a = 2, b = 3$
- b) $a = 2, b = 4$
- c) $a = 2, b = 5$
- d) $a = 3, b = 4$
- e) $a = 64/27, b = 256/81$

131. Rozwiązać nierówności

- a) $\log_{2x}(x^2+1) \leq \log_{2x}(x^2+3x)$
- b) $(x^2+x+1)^{3x} > (x^2+x+1)^{x+1}$
- c) $x^4 - 5x^2 + 4 < 0$
- d) $\log_2 x + \log_x 4 < 3$

132. Na potrzeby tego zadania, dla liczby rzeczywistej $a > 1$ zdefiniujemy średnią liczb rzeczywistych x, y większych od 1, następującym wzorem

$$S_a(x, y) = a^{\sqrt{\log_a x \cdot \log_a y}}.$$

Podać wartości następujących liczb w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego w przypadku liczb wymiernych. Wpisać literkę **N** w przypadku liczb niewymiernych.

- a) $S_8(2, 16) = \dots\dots\dots$;
- b) $S_9(2, 16) = \dots\dots\dots$;
- c) $S_8(3, 81) = \dots\dots\dots$;
- d) $S_9(3, 81) = \dots\dots\dots$.

Ćwiczenia 17,19.11.2014 (poniedziałek, środa)

Osoby, które uzyskały łącznie mniej niż 80 punktów (50%) na sprawdzianie nr 1 i kolokwium nr 1, powinny przyjść na ćwiczenia. Pozostali mogą ograniczyć się do rozwiązania zadań we własnym zakresie.

133. Zapisać zbiór rozwiązań podanej nierówności w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów (nie używać różnicy zbiorów).

- a) $(|\log_5 x| - 1)^2 < 1$,
- b) $(|\log_5 x| - 1)^3 < 1$,
- c) $(|\log_5 x| - 2)^4 > 1$,
- d) $(|\log_5 x| - 2)^5 > 1$,

134. Zapisać zbiór rozwiązań podanej nierówności w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów (nie używać różnicy zbiorów).

- a) $(\log_2 x - 2) \cdot (\log_3 x - 3) > 0$,
- b) $(\log_2 x - 3) \cdot (\log_3 x - 2) > 0$,
- c) $(\log_2 x - 3)^3 \cdot (\log_3 x - 2)^2 > 0$,
- d) $(\log_2 x - 3)^2 \cdot (\log_3 x - 2)^3 > 0$,

135. Zapisać zbiór rozwiązań podanej nierówności w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów (nie używać różnicy zbiorów).

- a) $\log_x 4 < 2$,
- b) $\log_x 4 < -2$,
- c) $\log_x 2 > 2$,
- d) $\log_x 2 > -1$,

136. Podać taką liczbę x , że

- a) $\log_2 3 = 2 \cdot \log_2 x$, $x = \dots$;
- b) $\log_2 3 = 2 + \log_2 x$, $x = \dots$;
- c) $3 \cdot \log_3 2 = \log_3 x$, $x = \dots$;
- d) $3 + \log_3 2 = \log_3 x$, $x = \dots$.

137. Niech $A(n) = 4^{4^n}$, $B(n) = 256^{16^n}$, $C(n) = \log_2 A(n)$, $D(n) = \log_2 B(n)$, $E(n) = \log_{C(n)} D(n)$. Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego:

- a) $E(100) = \dots$;
- b) $E(200) = \dots$;
- c) $E(300) = \dots$;
- d) $E(400) = \dots$.

138. Niech $A(n) = 4^{4^n}$, $B(n) = 256^{64^n}$, $C(n) = \log_2 A(n)$, $D(n) = \log_2 B(n)$, $E(n) = \log_{C(n)} D(n)$. Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego:

- a) $E(100) = \dots$;
- b) $E(200) = \dots$;
- c) $E(300) = \dots$;
- d) $E(400) = \dots$.

139. Dla podanej liczby n przyjąć za podstawę logarytmu $a = \sqrt[n]{n}$, a następnie zapisać liczbę $\log_a 2$ w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego

- a) $n = 2$, $\log_a 2 = \dots\dots\dots$;
- b) $n = 4$, $\log_a 2 = \dots\dots\dots$;
- c) $n = 8$, $\log_a 2 = \dots\dots\dots$;
- d) $n = 16$, $\log_a 2 = \dots\dots\dots$.

140. Podać wartość podanej liczby w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego, gdy podana liczba jest wymierna. Napisać **N**, jeśli podana liczba jest niewymierna.

- a) $\log_2 \log_2 4^{4^4} = \dots\dots\dots$;
- b) $\log_2 \log_2 4^{4^5} = \dots\dots\dots$;
- c) $\log_2 \log_2 4^{4^6} = \dots\dots\dots$;
- d) $\log_2 \log_2 4^{4^8} = \dots\dots\dots$.

141. Dla podanej liczby a wskazać taką liczbę rzeczywistą dodatnią b , aby spełniona była równość $1 + (\log_5 a) + \log_5 b = \log_5 (2a^2 + 2b^2)$.

- a) $a = 2$, $b = \dots\dots\dots$;
- b) $a = 3$, $b = \dots\dots\dots$;
- c) $a = 4$, $b = \dots\dots\dots$;
- d) $a = 6$, $b = \dots\dots\dots$.

142. Dla podanych liczb rzeczywistych x i y wskazać taką liczbę rzeczywistą dodatnią a , aby prawdziwa była równość $\log_a x = y$.

- a) $x = 16$, $y = 2$, $a = \dots\dots\dots$;
- b) $x = 16$, $y = -4$, $a = \dots\dots\dots$;
- c) $x = 2$, $y = 4$, $a = \dots\dots\dots$;
- d) $x = 2$, $y = -1/4$, $a = \dots\dots\dots$.

143. Dla podanych liczb a, b podać taką liczbę rzeczywistą c , aby zachodziła równość $\log_a b = \log_b c$.

- a) $a = 3$, $b = 9$, $c = \dots\dots\dots$;
- b) $a = 9$, $b = 3$, $c = \dots\dots\dots$;
- c) $a = 5^4$, $b = 5^6$, $c = \dots\dots\dots$;
- d) $a = 7^{5^4}$, $b = 7^{5^6}$, $c = \dots\dots\dots$.

144. Dla podanych liczb a, b zapisać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego wartość liczby $\log_x y$, gdzie $x = \log_a b$ oraz $y = \log_b a$. Napisać literkę **N**, jeżeli liczba ta jest niewymierna.

- a) $a = 2^{2^4}$, $b = 2^{2^6}$, $\log_x y = \dots\dots\dots$;
- b) $a = 2^{2^7}$, $b = 2^{2^{14}}$, $\log_x y = \dots\dots\dots$;
- c) $a = 2^{2^9}$, $b = 2^{2^{12}}$, $\log_x y = \dots\dots\dots$;
- d) $a = 2^{2^{16}}$, $b = 2^{2^{32}}$, $\log_x y = \dots\dots\dots$.

145. Niech $\prod_{i=m}^n a_i = a_m \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdot a_{m+3} \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$.

Zapisać wartość podanego iloczynu w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego, jeśli liczba jest wymierna. Napisać literkę **N**, jeżeli liczba jest niewymierna.

- a) $\prod_{i=1}^4 \log_{(3i+1)}(3i+4) = \dots$;
 b) $\prod_{i=2}^4 \log_{(3i+1)}(3i+4) = \dots$;
 c) $\prod_{i=2}^{15} \log_{(3i+1)}(3i+4) = \dots$;
 d) $\prod_{i=2}^{16} \log_{(3i+1)}(3i+4) = \dots$.

146. Podać zbiór rozwiązań nierówności zapisując go w postaci przedziału lub sumy przedziałów.

- a) $-\frac{1}{2} < \log_4 x < \frac{3}{2}$;
 b) $\frac{1}{3} < \log_{64} x < \frac{1}{2}$;
 c) $-\frac{3}{5} < \log_{32} x < \frac{4}{5}$;
 d) $-\frac{3}{2} < \log_9 x < \frac{1}{4}$

147. Podać zbiór rozwiązań nierówności zapisując go w postaci przedziału lub sumy przedziałów.

- a) $\frac{1}{2} < \log_x 8 < 3$;
 b) $-\frac{1}{2} < \log_x 9 < 2$;
 c) $-2 < \log_x 4 < \frac{1}{3}$;
 d) $-3 < \log_x 64 < -2$

148. Czy jest prawdą, że

- a) $2 \cdot \log_3 5 = \log_3 10$
 b) $2 \cdot \log_3 5 = \log_3 25$
 c) $2 + \log_3 5 = \log_3 10$
 d) $2 + \log_3 5 = \log_3 45$
 e) $\sqrt{(2 - \log_3 7)^2} = 2 - \log_3 7$
 f) $\sqrt{(2 - \log_2 7)^2} = 2 - \log_2 7$
 g) $\sqrt{(2 - \log_5 23)^2} = 2 - \log_5 23$
 h) $\sqrt{(2 - \log_4 17)^2} = 2 - \log_4 17$