

Sprawdzian nr 2: 25.11.2014, godz. 8:15-8:40 (materiał zad. 1-148)

Sprawdzian nr 3: 9.12.2014, godz. 8:15-8:40 (materiał zad. 1-188)

**Część całkowita i ułamkowa, funkcje trygonometryczne,
podstawowe własności funkcji**

Ćwiczenia 25, 27.11.2014, 2, 4.12.2014 (wtorki, czwartki)

Po sprawdzianie nr 2 na ćwiczeniach 25.11.2014 omawiamy zadania z tego sprawdzianu.

Oznaczenia: Przypominam, że $[x]$ oraz $\{x\}$ oznaczają odpowiednio część całkowitą i część ułamkową liczby rzeczywistej x .

149. Podać przykład takiej liczby rzeczywistej x , że

- a) $[x] = -4, \{x\} < 1/10$
- b) $[x] = -4, \{x\} > 9/10$
- c) $2 \cdot \{x\} \neq \{2x\}, x < 0$
- d) $2 \cdot \{x\} = \{5x\}, x > 10, x \notin \mathbb{N}$

150. Wyznaczyć wszystkie takie liczby rzeczywiste a , że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi równość $[x+a] = [x] + a$.

151. Podać przykład takich liczb rzeczywistych x, y , że

- a) $[x+y] \neq [x] + [y]$
- b) $[2x+y] = 2[x] + [y] + 2$
- c) $[x+y] = \{x\} + \{y\}, x, y > 0$
- d) $[xy] = [x] \cdot [y] + 10$

152. Uporządkować podane liczby w kolejności niemalejącej.
 $\sin 50^\circ, \cos 80^\circ, \sin 170^\circ, \cos 200^\circ, \sin 250^\circ, \cos 280^\circ$.

153. Naszycować wykres funkcji f zdefiniowanej wzorem

- a) $f(x) = \sin 2x$
- b) $f(x) = \cos 3x$
- c) $f(x) = \sin(x/2)$
- d) $f(x) = \sin^2 x$
- e) $f(x) = \cos^2 x$
- f) $f(x) = (1 + \cos 2x)/2$
- g) $f(x) = (1 - \cos 2x)/2$
- h) $f(x) = 3 + 5 \cos x$
- i) $f(x) = \sin \pi x$

154. Uprościć wyrażenie, w którym n przebiega liczby naturalne.

- a) $\sin n\pi$
- b) $\sin n^2\pi$
- c) $\cos n\pi$
- d) $\cos n^3\pi$
- e) $\cos(n^2 + n)\pi$
- f) $\sin((2n+1)\pi/2)$
- g) $\sin((2n-1)\pi/2)$

Dopuszczalne odpowiedzi: $1, 0, (-1)^n, (-1)^{n+1}$.

155. Która liczba jest większa?

- a) $\sin 1^\circ$ czy $\sin 1$
- b) $\sin 2^\circ$ czy $\sin 2$
- c) $\sin 3^\circ$ czy $\sin 3$
- d) $\sin 4^\circ$ czy $\sin 4$
- e) $\sin 5^\circ$ czy $\sin 5$
- f) $\sin 6^\circ$ czy $\sin 6$

156. Rozwiązać równania i nierówności.

- a) $\sin x \geq 1/2$
- b) $\cos x \leq 1/2$
- c) $\sin x \geq \cos x$
- d) $[4\sin^2 x] = 2$
- e) $\{\cos^2 x\} = 3/4$
- f) $\sqrt{1 + \cos x} = \sqrt{2} \cdot \cos(x/2)$
- g) $\sin^2 x + \cos^4 x = \cos^2 x + \sin^4 x$

157. Jaką najmniejszą i największą wartość przyjmuje wyrażenie

$$\sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x \cdot \cos 16x ?$$

158. Dla funkcji f zdefiniowanej podanym wzorem oraz dla podanego zbioru Z rozstrzygnąć, czy funkcja f jest różnowartościowa na zbiorze Z oraz podać zbiór wartości funkcji f na zbiorze Z .

- a) $f(x) = x^2$, $Z = [-3, -1)$
- b) $f(x) = x^2$, $Z = (-3, 4]$
- c) $f(x) = x^2$, $Z = [-3, -2] \cup [3, 5]$
- d) $f(x) = x^2$, $Z = (-3, -2] \cup [3, 4)$
- e) $f(x) = x^2$, $Z = (0, 3)$
- f) $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $Z = (0, 3)$
- g) $f(x) = x^2 + 2x + 1$, $Z = (0, 3)$
- h) $f(x) = 2^x$, $Z = (-3, 3)$
- i) $f(x) = |2^x - 3|$, $Z = (-3, 3)$
- j) $f(x) = |2^x - 5|$, $Z = (-3, 3)$

159. Niech

$$f(x) = \left| \left[x + \frac{1}{2} \right] - x \right|.$$

Naszkicować wykres funkcji f oraz wykresy następujących funkcji

- a) $f_1(x) = f(2x)$
- b) $f_2(x) = f(x/2)$
- c) $f_3(x) = 2f(x)$
- d) $f_4(x) = f\left(x + \frac{1}{4}\right)$
- e) $f_5(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right)$
- f) $f_6(x) = f\left(x - \frac{1}{2}\right)$

$$\text{g)} f_7(x) = \frac{1}{2} - f(x)$$

$$\text{h)} f_8(x) = f\left(\left|x - \frac{1}{4}\right|\right)$$

$$\text{i)} f_9(x) = \left|f\left(x - \frac{1}{4}\right)\right|$$

$$\text{j)} f_{10}(x) = \frac{f(2x)}{2}$$

$$\text{k)} f_{11}(x) = f(x) + x$$

$$\text{l)} f_{12}(x) = 5f(x) + 3x$$

160. Czy funkcja f zdefiniowana podanym wzorem jest parzysta? Nieparzysta?

$$\text{a)} f(x) = 0$$

$$\text{b)} f(x) = 37$$

$$\text{c)} f(x) = 2x$$

$$\text{d)} f(x) = 2x^2 + 1$$

$$\text{e)} f(x) = 14x^5 + 6x^3$$

$$\text{f)} f(x) = x^6 + x^5$$

$$\text{g)} f(x) = \sin^{37} x \cdot \cos^{24} x$$

$$\text{h)} f(x) = \sin^{24} x \cdot \cos^{37} x$$

$$\text{i)} f(x) = x^{111} \cdot \sin^{24} x \cdot \cos^{37} x$$

$$\text{j)} f(x) = x^{111} \cdot \sin^{37} x \cdot \cos^{24} x$$

$$\text{k)} f(x) = x^{666} \cdot \sin^{24} x \cdot \cos^{37} x$$

$$\text{l)} f(x) = x^{666} \cdot \sin^{37} x \cdot \cos^{24} x$$

$$\text{m)} f(x) = \sin x^{37}$$

$$\text{n)} f(x) = \sin x^{24}$$

$$\text{o)} f(x) = \cos x^{37}$$

$$\text{p)} f(x) = \cos x^{24}$$

$$\text{q)} f(x) = (x^2 + 1)\sin x$$

$$\text{r)} f(x) = (x^2 + 1)\cos x$$

$$\text{s)} f(x) = (x^3 + 1)\sin x$$

$$\text{t)} f(x) = (x^3 + 1)\cos x$$

161. Dla każdej z liczb $i \in \{1, 2, \dots, 13\}$ wskazać taką liczbę $j \in \{1, 2, \dots, 13\}$, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi równość $f_j(f_i(x)) = x$.

$$f_1(x) = 37 + x$$

$$f_2(x) = 37 - x$$

$$f_3(x) = x - 37$$

$$f_4(x) = 3x - 2$$

$$f_5(x) = 3x - 4$$

$$f_6(x) = 3x - 6$$

$$f_7(x) = \frac{x}{3} + 2$$

$$f_8(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}$$

$$f_9(x) = \frac{x}{3} + \frac{4}{3}$$

$$f_{10}(x) = -\frac{5}{4}x + \frac{3}{4}|x|$$

$$f_{11}(x) = -\frac{5}{4}x - \frac{3}{4}|x|$$

$$f_{12}(x) = \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}|x|$$

$$f_{13}(x) = \frac{5}{4}x - \frac{3}{4}|x|$$

162. Funkcja f spełnia warunki

$$f(3-x) = f(x), \quad f(6-x) = f(x)$$

dla dowolnej liczby rzeczywistej x . Dowieść, że funkcja f jest okresowa i parzysta.

Ćwiczenia 26.11.2014, 1,3,8.12.2014 (poniedziałki, środy)

163. Podać wartość wyrażenia, gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x .

- a) $[\log_{\sqrt{2}} 6] = \dots\dots\dots$;
- b) $[\log_{\sqrt{2}} 11] = \dots\dots\dots$;
- c) $[\log_{\sqrt{2}} 12] = \dots\dots\dots$;
- d) $[\log_{\sqrt{2}} 88] = \dots\dots\dots$.

164. Dla podanej liczby n podać najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią $m \neq n$ taką, że $\{\log_2 m\} = \{\log_2 n\}$, gdzie $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x .

- a) $n = 48, \quad m = \dots\dots\dots$;
- b) $n = 50, \quad m = \dots\dots\dots$;
- c) $n = 51, \quad m = \dots\dots\dots$;
- d) $n = 52, \quad m = \dots\dots\dots$.

165. Podać wartość wyrażenia, gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x .

- a) $[\log_2(\sqrt{6} - \sqrt{5})] = \dots\dots\dots$;
- b) $[\log_2(\sqrt{11} - \sqrt{10})] = \dots\dots\dots$;
- c) $[\log_2(\sqrt{31} - \sqrt{30})] = \dots\dots\dots$;
- d) $[\log_2(\sqrt{66} - \sqrt{65})] = \dots\dots\dots$.

166. Podać wartość wyrażenia, gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x .

- a) $[\log_{\sqrt{2}} 3] = \dots\dots\dots$;
- b) $[\log_{\sqrt{3}} 5] = \dots\dots\dots$;
- c) $[\log_{\sqrt{2}} 5] = \dots\dots\dots$;
- d) $[\log_{\sqrt{2}} 10] = \dots\dots\dots$.

167. Dla podanej liczby n podać najmniejszą liczbę **rzeczywistą** $x > 1$ taką, że $\{\log_2 x\} = \{\log_2 n\}$, gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y .

- a) $n = 48$, $x = \dots$;
- b) $n = 5$, $x = \dots$;
- c) $n = 20$, $x = \dots$;
- d) $n = 18$, $x = \dots$.

168. Dla podanej liczby naturalnej n podać **największą** liczbę **rzeczywistą** $x < 100$ taką, że $\{\log_2 x\} = \{\log_2 n\}$, gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y .

- a) $n = 11$, $x = \dots$;
- b) $n = 21$, $x = \dots$;
- c) $n = 41$, $x = \dots$;
- d) $n = 124$, $x = \dots$.

169. Podać wartość wyrażenia, gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x .

- a) $\left[\frac{1}{4 - \sqrt{15}} \right] = \dots$;
- b) $\left[\frac{1}{\sqrt{17} - 4} \right] = \dots$;
- c) $\left[\frac{1}{5 - 2\sqrt{6}} \right] = \dots$;
- d) $\left[\frac{1}{7 - 5\sqrt{2}} \right] = \dots$.

170. Dla podanej liczby naturalnej k podać **największą** liczbę **naturalną** n taką, że $[\log_k n] = [\log_k 27]$, gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x .

- a) $k = 2$, $n = \dots$;
- b) $k = 3$, $n = \dots$;
- c) $k = 4$, $n = \dots$;
- d) $k = 5$, $n = \dots$.

171. Podać przykład liczby niecałkowitej x spełniającej podane równanie, gdzie $[y]$ oraz $\{y\}$ oznaczają odpowiednio część całkowitą i ułamkową liczby y . Wynik podać w postaci ułamka dziesiętnego skończonego lub okresowego (taka postać odpowiedzi jest częścią zadania, więc wyniki poprawne, ale w innej postaci, nie będą uznawane).

- a) $[x] = 3\{x\}$, $x = \dots$;
- b) $[x] = 4\{x\}$, $x = \dots$;
- c) $[x] = 5\{x\}$, $x = \dots$;
- d) $[x] = 6\{x\}$, $x = \dots$.

172. Podać zbiór rozwiązań równania w postaci przedziału lub sumy przedziałów. Symbol $[y]$ oznacza część całkowitą liczby y .

- a) $[\log_3 \log_2 x] = 0$,
- b) $[\log_2 \log_3 x] = 0$,
- c) $[\log_3 \log_3 x] = 1$,
- d) $[\log_2 \log_2 x] = 3$,

173. Dla podanej miary kąta α podać najmniejszą dodatnią miarę kąta β różną od α i spełniającą równość $\sin \alpha = \sin \beta$.

- a) $\alpha = 100^\circ$, $\beta = \dots$;
- b) $\alpha = 50^\circ$, $\beta = \dots$;
- c) $\alpha = 200^\circ$, $\beta = \dots$;
- d) $\alpha = 90^\circ$, $\beta = \dots$.

174. Dla podanej miary kąta α podać najmniejszą dodatnią miarę kąta β różną od α i spełniającą równość $\cos \alpha = \cos \beta$.

- a) $\alpha = 100^\circ$, $\beta = \dots$;
- b) $\alpha = 180^\circ$, $\beta = \dots$;
- c) $\alpha = 300^\circ$, $\beta = \dots$;
- d) $\alpha = 400^\circ$, $\beta = \dots$.

175. Dla podanej miary kąta α podać najmniejszą dodatnią miarę kąta β spełniającą równość $\sin \alpha + \sin \beta = 0$.

- a) $\alpha = 10^\circ$, $\beta = \dots$;
- b) $\alpha = 100^\circ$, $\beta = \dots$;
- c) $\alpha = 200^\circ$, $\beta = \dots$;
- d) $\alpha = 300^\circ$, $\beta = \dots$.

176. Niech $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem $f_1(x) = |x - 3|$. Funkcje f_n dla $n \geq 2$ określamy rekurencyjnie wzorem

$$f_n(x) = f_1(f_{n-1}(x)).$$

Podać wartość

- a) $f_{1000}(1001) = \dots$;
- b) $f_{1000}(2002) = \dots$;
- c) $f_{1000}(3003) = \dots$;
- d) $f_{1000}(4004) = \dots$.

177. Podać wartość wyrażenia, gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x .

- a) $[\log_{10} \log_{10} ((10^3)!)] = \dots$;
- b) $[\log_{10} \log_{10} ((10^5)!)] = \dots$;
- c) $[\log_{10} \log_{10} ((10^{10})!)] = \dots$;
- d) $[\log_{10} \log_{10} ((10^{20})!)] = \dots$.

178. Funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest określona wzorem $f(x) = |x^2 - 25|$. Zapisać w postaci przedziału zbiór wartości funkcji f na podanym przedziale Z .

- a) $Z = (-7, -4)$,
- b) $Z = (-6, -1)$,
- c) $Z = (-4, 6)$,
- d) $Z = (-1, 1)$,

179. Funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest określona wzorem $f(x) = |\log_2 x|$. Zapisać w postaci przedziału zbiór wartości funkcji f na podanym przedziale Z .

- a) $Z = (0, 1/32)$,
- b) $Z = (1/64, 1/2)$,
- c) $Z = (1/8, 4)$,
- d) $Z = (2, 16)$,

180. Dla podanej miary kąta α podać najmniejszą dodatnią miarę kąta β spełniającą równość $\cos \alpha = \sin \beta$.

- a) $\alpha = 10^\circ$, $\beta = \dots$;
- b) $\alpha = 50^\circ$, $\beta = \dots$;
- c) $\alpha = 100^\circ$, $\beta = \dots$;
- d) $\alpha = 200^\circ$, $\beta = \dots$.

181. Podać wartość wyrażenia, gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x .

- a) $[\log_2 \log_2 13^7] = \dots$;
- b) $[\log_2 \log_2 13^{11}] = \dots$;
- c) $[\log_2 \log_2 13^{15}] = \dots$;
- d) $[\log_2 \log_2 13^{25}] = \dots$.

182. Podać największą liczbę naturalną n , dla której podana równość jest prawdziwa. Symbol $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x .

- a) $[\log_2 n] = 5$, $n = \dots$;
- b) $[\log_3 n] = 3$, $n = \dots$;
- c) $[\log_5 n] = 2$, $n = \dots$;
- d) $[\log_7 n] = 1$, $n = \dots$.

183. Zapisać zbiór rozwiązań podanej nierówności w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów (nie używać różnicy zbiorów).

- a) $\log_x(\sqrt{2} - 1) > -1$,
- b) $\log_x(2 - \sqrt{3}) > -1$,
- c) $\log_x(\sqrt{5} - 2) < -1$,
- d) $\log_x(3 - \sqrt{8}) < -1$,

184. Dla podanej liczby a podać zbiór rozwiązań nierówności $\log_a x \geq 2$ zapisując go w postaci przedziału lub sumy przedziałów.

- a) $a = 3$,
- b) $a = 1/4$,
- c) $a = 1/5$,
- d) $a = 6$,

185. Dla podanej liczby a podać zbiór rozwiązań nierówności $\log_x a \geq 2$ zapisując go w postaci przedziału lub sumy przedziałów.

- a) $a = 3$,
- b) $a = 1/4$,
- c) $a = 1/5$,
- d) $a = 6$,

186. Podać wartość wyrażenia, gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x .

- a) $\left[\frac{1}{6 - \sqrt{34}} \right] = \dots$
- b) $\left[\frac{1}{6 - \sqrt{35}} \right] = \dots$
- c) $\left[\frac{1}{6 - \sqrt{37}} \right] = \dots$
- d) $\left[\frac{1}{6 - \sqrt{39}} \right] = \dots$

187. Zapisać zbiór rozwiązań podanej nierówności w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów (nie używać różnicy zbiorów).

- a) $(3 - \log_2 x)^2 < 1$,
- b) $(3 - \log_2 x)^3 > 1$,
- c) $(3 - \log_2 x)^4 > 1$,
- d) $(3 - \log_2 x)^5 < 1$,

188. Zapisać zbiór rozwiązań podanej nierówności w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów (nie używać różnicy zbiorów).

- a) $\log_x 8 \leq 2$,
- b) $\log_x 8 \geq 1/2$,
- c) $\log_x 8 \leq -2$,
- d) $\log_x 8 \geq -1/2$,