

Kolokwium nr 3: 27.01.2015 (wtorek), godz. 8:15-10:00 (materiał zad. 1-309)

Kolokwium nr 4: 3.02.2015 (wtorek), godz. 8:15-10:00 (materiał zad. 1-309)

Ćwiczenia 13,15,20,22.01.2015 (wtorki, czwartki)

266. Punkt O jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Wiadomo, że

$$\sphericalangle AOB = \sphericalangle ACB + 60^\circ.$$

Wyznaczyć miarę kąta ACB .

267. To samo pytanie, gdy O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC .

268. W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku A ma miarę 30° , a boki AC i BC mają długości odpowiednio $\sqrt{3}$ oraz 1. Wyznaczyć długość boku AB .

269. W trapezie o wysokości 9 ramiona mają długości 15 i 41, a dolna podstawa ma długość 60. Jaka jest długość górnej podstawy?

270. Wyznaczyć wszystkie trójkąty prostokątne o bokach długości całkowitej, w których jedna z przyprostokątnych ma długość

- a) 11
- b) 12
- c) 15
- d) 24

271. Niech $0 < a \leq b \leq c$. Dokończyć i uzasadnić:

- a) Z odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkąt wtedy i tylko wtedy, gdy ...
- b) Z odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkąt prostokątny wtedy i tylko wtedy, gdy ...
- c) Z odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkąt rozwartokątny wtedy i tylko wtedy, gdy ...
- d) Z odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkąt ostrokątny wtedy i tylko wtedy, gdy ...
- e) Z odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkąt o jednym z kątów mającym miarę 120° wtedy i tylko wtedy, gdy ...
- f) Z odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkąt o jednym z kątów mającym miarę 60° wtedy i tylko wtedy, gdy ...

272. W trójkącie o bokach podanej długości wskazać kąt, którego miara wyrażona w stopniach jest liczbą całkowitą.

- a) 3, 4, 5
- b) 3, 5, 7
- c) 3, 7, 8

273. Pole dowolnego wielokąta o obwodzie p opisanego na okręgu o promieniu r jest równe S . Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

- a) $p = 12, r = 1, S = 6$
- b) $p = 16, r = 2, S = 18$
- c) $p = 20, r = 3, S = 30$
- d) $p = 24, r = 4, S = 50$
- e) $p = 28, r = 5, S = 70$

274. Jeśli w poprzednim zadaniu udzielił(a/e)ś 3 odpowiedzi TAK i 2 odpowiedzi NIE, rozwiąż je ponownie, tym razem poprawnie.

275. Dany jest taki czworokąt wypukły $ABCD$, że wierzchołki A i C , środek przekątnej BD oraz środki okręgów opisanych na trójkątach ABD i CBD leżą na jednej prostej. Udowodnić, że

$$AB^{2014} + BC^{2014} = AD^{2014} + DC^{2014}.$$

276. Na okręgu opisano pięciokąt o bokach 3, 4, 5, 6, 7 (w tej kolejności). Wyznaczyć położenie punktów styczności okręgu do boków pięciokąta.

277. Pięć kolejnych boków wielokąta opisanego na okręgu ma długości a, b, c, d, e (z zachowaniem kolejności). Wykazać, że wówczas

$$b + d < a + c + e.$$

278. Wykazać, że dla sześciokąta o bokach a, b, c, d, e, f (z zachowaniem kolejności) równość

$$a + c + e = b + d + f$$

jest warunkiem (koniecznym/dostatecznym)¹ na to, aby w sześciokąt można było wpisać okrąg. Pokazać na przykładzie, że nie jest to warunek (konieczny/dostateczny)¹.

279. Dla których liczb naturalnych $n \geq 3$ poniższe zdanie jest prawdziwe

- a) Dowolny n -kąt wpisany w okrąg i mający wszystkie boki równej długości jest foremny.
- b) Dowolny n -kąt wpisany w okrąg i mający wszystkie kąty równej miary jest foremny.
- c) Dowolny n -kąt opisany na okręgu i mający wszystkie boki równej długości jest foremny.
- d) Dowolny n -kąt opisany na okręgu i mający wszystkie kąty równej miary jest foremny.

280. Na płaszczyźnie dany jest trójkąt ABC . Ile co najwyżej może istnieć takich punktów D różnych od C , że proste AB i CD są prostopadłe, a przy tym

$$\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB ?$$

281. W okrąg o promieniu R wpisano taki czworokąt $ABCD$, że $AB = BC = a$ oraz $CD = DA = b$. Podać wzór na R w zależności od a i b . Wzór nie może zawierać funkcji trygonometrycznych.

282. W okrąg o promieniu R wpisano taki sześciokąt $ABCDEF$, że $AB = BC = CD = a$ oraz $DE = EF = FA = b$. Podać wzór (bez funkcji trygonometrycznych) na R w zależności od a i b .

Ćwiczenia 12,14,19,21,26.01.2015 (poniedziałki, środy)

283. Mając narysowany okrąg i jego środek, skonstruować kąt prosty przy użyciu samej linijki.

- 284.** Czy istnieje czworokąt, którego boki mają długości (w podanej kolejności)
- a) 1, 3, 10, 15
 - b) 2, 4, 10, 15
 - c) 3, 27, 10, 15
 - d) 4, 30, 10, 15

285. Wyznaczyć położenie punktów styczności okręgu wpisanego w trójkąt o bokach 3, 4, 5 do boków tego trójkąta.

286. Trzy kolejne boki wielokąta opisanego na okręgu mają długości a, b, c (z zachowaniem kolejności). Jaki warunek muszą spełniać a, b, c , aby było to możliwe?

¹niepotrzebne skreślić

287. Dany jest dwunastokąt foremny $A_1A_2A_3\dots A_{12}$. Dla podanych dwóch przekątnych wskazać trzecią przekątną przechodzącą przez ich punkt przecięcia.

- a) A_1A_7, A_3A_9
- b) A_1A_5, A_2A_8
- c) A_1A_5, A_3A_7
- d) A_1A_6, A_4A_9

288. Poniższe warunki dotyczą czworokąta wypukłego. Połączyć je w pary warunków równoważnych.

- a) w czworokąt można wpisać okrąg
- b) na czworokącie można opisać okrąg
- c) czworokąt jest równoległobokiem
- d) czworokąt jest rombem
- e) czworokąt jest prostokątem
- f) sumy miar przeciwległych kątów są równe
- g) sumy długości przeciwległych boków są równe
- h) sumy kwadratów długości przeciwległych boków są równe
- i) przekątne są równej długości i dzielą się na połowy
- j) przekątne są prostopadłe i dzielą się na połowy
- k) przekątne są prostopadłe
- l) przekątne dzielą się na połowy

289. Dany jest jedenastokąt foremny $A_1A_2A_3\dots A_{11}$. Połączyć podane czworokąty w pary czworokątów przystających

- a) $A_1A_2A_4A_9$
- b) $A_1A_3A_7A_{11}$
- c) $A_1A_4A_{10}A_{11}$
- d) $A_1A_6A_9A_{10}$
- e) $A_1A_4A_6A_{11}$
- f) $A_1A_2A_3A_9$
- g) $A_1A_6A_8A_{11}$
- h) $A_1A_3A_4A_8$

Które czworokąty mają równe pola?

290. Dany jest 20-kąt foremny $A_1A_2A_3\dots A_{20}$. Podać miarę kąta

- a) $\sphericalangle A_6A_{17}A_7 = \dots\dots\dots$;
- b) $\sphericalangle A_6A_7A_{17} = \dots\dots\dots$;
- c) $\sphericalangle A_6A_2A_{17} = \dots\dots\dots$;
- d) $\sphericalangle A_6A_{20}A_{17} = \dots\dots\dots$.

291. Dany jest n -kąt foremny $A_1A_2\dots A_n$. Podać miarę kąta $\sphericalangle A_1A_2A_4$, jeżeli

- a) $n = 6, \dots\dots\dots$;
- b) $n = 9, \dots\dots\dots$;
- c) $n = 18, \dots\dots\dots$;
- d) $n = 27, \dots\dots\dots$.

292. W miejscu kropek napisać taką liczbę rzeczywistą, aby w czworokąt wypukły o bokach podanej długości (z zachowaniem kolejności) można było wpisać okrąg. Napisać **NIE**, jeśli taka liczba nie istnieje.

- a) 5, 7, 5,;
- b) 5, 7, 7,;
- c) 5, 7, 4,;
- d) 5, 7, 6,

293. W miejscu kropek napisać taką liczbę rzeczywistą, aby w czworokącie wypukłym o bokach podanej długości (z zachowaniem kolejności) przekątne były prostopadłe. Napisać **NIE**, jeśli taka liczba nie istnieje.

- a) 5, 7, 5,;
- b) 5, 7, 7,;
- c) 5, 7, 4,;
- d) 5, 7, 6,

294. Dany jest piętnastokąt foremny $A_1A_2A_3\dots A_{15}$. Dla podanych liczb m, n podać **wszystkie** takie liczby k , że trójkąt $A_mA_nA_k$ ma co najmniej jeden kąt o mierze 60°

- a) $m=1, n=4, k \in \{\dots\}$;
- b) $m=1, n=5, k \in \{\dots\}$;
- c) $m=1, n=8, k \in \{\dots\}$;
- d) $m=1, n=10, k \in \{\dots\}$.

295. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC . Dla podanej miary kąta $\sphericalangle ABC$ podać miarę kąta wypukłego $\sphericalangle AOC$.

- a) $\sphericalangle ABC = 50^\circ, \sphericalangle AOC = \dots$;
- b) $\sphericalangle ABC = 80^\circ, \sphericalangle AOC = \dots$;
- c) $\sphericalangle ABC = 100^\circ, \sphericalangle AOC = \dots$;
- d) $\sphericalangle ABC = 150^\circ, \sphericalangle AOC = \dots$.

296. Uzupełnij dane dotyczące n -kąta foremnego, gdzie LP jest liczbą przekątnych, a MKW miarą kąta wewnętrznego.

- a) $n=6, LP = \dots, MKW = \dots$;
- b) $n = \dots, LP = \dots, MKW = 140^\circ$;
- c) $n = \dots, LP = \dots, MKW = 150^\circ$;
- d) $n = \dots, LP = 170, MKW = \dots$.

297. Dla podanej liczby naturalnej a podać takie liczby całkowite dodatnie b, c , że trójkąt o bokach długości a, b, c jest prostokątny, a przy tym c jest długością jego przeciwprostokątnej.

- a) $a=3, b=\dots, c=\dots$;
- b) $a=5, b=\dots, c=\dots$;
- c) $a=7, b=\dots, c=\dots$;
- d) $a=9, b=\dots, c=\dots$.

298. Dany jest n -kąt foremny wpisany w okrąg o promieniu 1. Podać liczbę jego przekątnych krótszych od 1.

- a) $n = 12$, liczba przekątnych krótszych od 1:
- b) $n = 17$, liczba przekątnych krótszych od 1:
- c) $n = 25$, liczba przekątnych krótszych od 1:
- d) $n = 42$, liczba przekątnych krótszych od 1:

299. Dla podanych a, b, c podać takie d , aby istniał czworokąt wypukły o bokach długości (z zachowaniem kolejności) a, b, c, d , w którym przekątne są prostopadłe. Napisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczba d o żądanej własności nie istnieje.

- a) $a = 1, b = 5, c = 7, d = \dots$;
- b) $a = 1, b = 4, c = 8, d = \dots$;
- c) $a = 4, b = 9, c = 8, d = \dots$;
- d) $a = 5, b = 11, c = 10, d = \dots$.

300. Istnieje czworokąt wypukły o bokach długości a, b, c, d (z zachowaniem kolejności), w który można wpisać okrąg. Dla podanych a, b, c podać takie d , aby powyższe zdanie było prawdziwe. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że takie d nie istnieje.

- a) $a = 3, b = 4, c = 7, d = \dots$;
- b) $a = 5, b = 6, c = 7, d = \dots$;
- c) $a = 7, b = 13, c = 7, d = \dots$;
- d) $a = 4, b = 10, c = 5, d = \dots$.

301. Istnieje czworokąt wypukły o kątach miary $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (z zachowaniem kolejności), na którym można opisać okrąg. Dla podanych α, β podać takie γ, δ , aby powyższe zdanie było prawdziwe. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że takie γ, δ nie istnieją.

- a) $\alpha = 10^\circ, \beta = 177^\circ, \gamma = \dots, \delta = \dots$;
- b) $\alpha = 20^\circ, \beta = 50^\circ, \gamma = \dots, \delta = \dots$;
- c) $\alpha = 40^\circ, \beta = 140^\circ, \gamma = \dots, \delta = \dots$;
- d) $\alpha = 80^\circ, \beta = 90^\circ, \gamma = \dots, \delta = \dots$.

302. W okrąg o promieniu 1 wpisano n -kąt foremny. Ile przekątnych tego n -kąta ma długość będącą liczbą całkowitą?

- a) Dla $n = 6$ takich przekątnych jest
- b) Dla $n = 12$ takich przekątnych jest
- c) Dla $n = 20$ takich przekątnych jest
- d) Dla $n = 30$ takich przekątnych jest

303. Czy nierówność $\sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos 3\alpha \cdot \cos 7\alpha \cdot \cos 15\alpha \cdot \cos 71\alpha > 0$ jest prawdziwa dla

- a) $\alpha = 1^\circ$;
- b) $\alpha = 2^\circ$;
- c) $\alpha = 3^\circ$;
- d) $\alpha = 4^\circ$?

304. Dany jest 15-kąt foremny $A_1A_2A_3\dots A_{15}$. Dla podanych x, y, z, s wskazać takie t , że pięciokąt wypukły o wierzchołkach A_x, A_y, A_z, A_s, A_t (niekoniecznie leżących na obwodzie pięciokąta w tej kolejności) ma pole równe polu pięciokąta $A_1A_3A_6A_{10}A_{15}$.

- a) $x=1, y=4, z=5, s=7, t= \dots\dots\dots$;
 b) $x=1, y=4, z=8, s=11, t= \dots\dots\dots$;
 c) $x=1, y=6, z=11, s=12, t= \dots\dots\dots$;
 d) $x=1, y=6, z=11, s=13, t= \dots\dots\dots$.

305. Rozważamy 100-kąt foremny $A_1A_2A_3\dots A_{100}$. Dla podanych liczb m, n podać zbiór wszystkich takich liczb całkowitych dodatnich $k \leq 100$, różnych od m, n , że trójkąt $A_mA_nA_k$ jest prostokątny.

- a) $m=1, n=2, k \in \{ \dots\dots\dots \}$;
 b) $m=17, n=29, k \in \{ \dots\dots\dots \}$;
 c) $m=44, n=66, k \in \{ \dots\dots\dots \}$;
 d) $m=50, n=75, k \in \{ \dots\dots\dots \}$.

306. Czy istnieje trójkąt, którego wysokości mają długości

- a) 5, 5, 9;
 b) 5, 5, 11;
 c) 5, 9, 9;
 d) 5, 11, 11?

307. Czy istnieje trójkąt, którego wysokości mają długości

- a) 10, 20, 29;
 b) 10, 20, 31;
 c) 10, 11, 20;
 d) 10, 11, 100?

308. W okrąg o promieniu R wpisano taki ośmiokąt $ABCDEFGH$, że $AB=BC=CD=DE=a$ oraz $EF=FG=GH=HA=b$. Uzupełnić wzór na R w zależności od a i b , wpisując w miejscu kropek odpowiednie współczynniki.

$$R = \sqrt{\dots\dots\dots \cdot a^2 + \dots\dots\dots \cdot ab + \dots\dots\dots \cdot b^2}$$

309. W okrąg o promieniu R wpisany jest taki dwunastokąt $ABCDEFGHIJKL$, że $AB=BC=CD=DE=EF=FG=a$ oraz $GH=HI=IJ=JK=KL=LA=b$. Uzupełnić wzór na R w zależności od a i b , wpisując w miejscu kropek odpowiednie współczynniki.

$$R = \sqrt{\dots\dots\dots \cdot a^2 + \dots\dots\dots \cdot ab + \dots\dots\dots \cdot b^2}$$

Ćwiczenia 29.01.2015 (czwartek): omówienie kolokwium nr 3.

Ćwiczenia 28.01, 2.02.2015 (środa, poniedziałek): powtórka przed kolokwium nr 4.

Ćwiczenia 4.02.2015 (środa): omówienie kolokwium nr 4.