

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

1. Dla podanej końcówki k podać największą liczbę całkowitą dodatnią d o następującej własności: Każda liczba całkowita dodatnia o pięciocyfrowej końcówce k jest podzielna przez d .

- a) $k = 00064$, $d = \mathbf{32}$
- b) $k = 00048$, $d = \mathbf{16}$
- c) $k = 00750$, $d = \mathbf{250}$
- d) $k = 00081$, $d = \mathbf{1}$

2. Po zmieszaniu 14 litrów roztworu pewnej substancji o stężeniu 30% z 14 litrami roztworu tejże substancji o stężeniu $p\%$, otrzymano roztwór o stężeniu $q\%$. Dla podanego q podać p .

- a) $q = 50$, $p = \mathbf{70}$
- b) $q = 40$, $p = \mathbf{50}$
- c) $q = 30$, $p = \mathbf{30}$
- d) $q = 20$, $p = \mathbf{10}$

3. Po zmieszaniu 7 litrów roztworu pewnej substancji o stężeniu 30% z 14 litrami roztworu tejże substancji o stężeniu $p\%$, otrzymano roztwór o stężeniu $q\%$. Dla podanego q podać p .

- a) $q = 30$, $p = \mathbf{30}$
- b) $q = 20$, $p = \mathbf{15}$
- c) $q = 50$, $p = \mathbf{60}$
- d) $q = 40$, $p = \mathbf{45}$

4. Dla podanej liczby q podać najmniejszą liczbę całkowitą $p > q$, dla której prawdziwe jest następujące zdanie:

Istnieją takie liczby całkowite dodatnie m, n , że liczba m^2 jest większa od liczby n^2 o $p\%$.

a) $q = 100, \quad p = \mathbf{125}$

b) $q = 7, \quad p = \mathbf{21}$

c) $q = 25, \quad p = \mathbf{44}$

d) $q = 33, \quad p = \mathbf{44}$

5. Zapisać zbiór rozwiązań podanej nierówności w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów (nie używać różnicy zbiorów).

a) $(4 - \log_2 x)^6 < 1, \quad (\mathbf{8}, \mathbf{32})$

b) $(4 - \log_2 x)^8 > 1, \quad (\mathbf{0}, \mathbf{8}) \cup (\mathbf{32}, +\infty)$

c) $(4 - \log_2 x)^7 > 1, \quad (\mathbf{0}, \mathbf{8})$

d) $(4 - \log_2 x)^9 < 1, \quad (\mathbf{8}, +\infty)$

6. Zapisać zbiór rozwiązań podanej nierówności w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów (nie używać różnicy zbiorów).

a) $\log_x 4 \geq -1/2, \quad (\mathbf{0}, \mathbf{1/16}] \cup (\mathbf{1}, +\infty)$

b) $\log_x 4 \leq -2, \quad [\mathbf{1/2}, \mathbf{1})$

c) $\log_x 4 \leq 2, \quad (\mathbf{0}, \mathbf{1}) \cup [\mathbf{2}, +\infty)$

d) $\log_x 4 \geq 1/2, \quad (\mathbf{1}, \mathbf{16}]$

7. Suma wyrazów dowolnego postępu arytmetycznego n -wyrazowego $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ jest równa $n \cdot \frac{a_6 + a_k}{2}$. Dla podanej liczby n wskazać taką liczbę całkowitą dodatnią $k \leq n$, aby powyższe zdanie było prawdziwe.

- a) $n = 11, \quad k = \mathbf{6}$
- b) $n = 25, \quad k = \mathbf{20}$
- c) $n = 2015, \quad k = \mathbf{2010}$
- d) $n = 99, \quad k = \mathbf{94}$

8. Dla podanej liczby n podać (w stopniach) najmniejszą dodatnią miarę kąta α spełniającą równość $\cos \alpha = \cos(n\alpha)$.

- a) $n = 5, \quad \alpha = \mathbf{60^\circ}$
- b) $n = 4, \quad \alpha = \mathbf{72^\circ}$
- c) $n = 3, \quad \alpha = \mathbf{90^\circ}$
- d) $n = 2, \quad \alpha = \mathbf{120^\circ}$

9. Zapisać wartość podanego iloczynu logarytmów w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

- a) $\log_{81} 49 \cdot \log_7 121 \cdot \log_{11} 27 = \mathbf{3}$
- b) $\log_8 27 \cdot \log_{81} 36 \cdot \log_6 32 = \mathbf{5/2}$
- c) $\log_4 125 \cdot \log_9 8 \cdot \log_{25} 27 = \mathbf{27/8}$
- d) $\log_{32} 125 \cdot \log_{11} 128 \cdot \log_{25} 121 = \mathbf{21/5}$

10. Rozważamy 100-kąt foremny $A_1A_2A_3\ldots A_{100}$. Dla podanych liczb m, n podać zbiór wszystkich takich liczb całkowitych dodatnich $k \leq 100$, różnych od m, n , że trójkąt $A_mA_nA_k$ jest prostokątny.

- a) $m = 50, \quad n = 75, \quad k \in \{ \mathbf{25}, \mathbf{100} \}$
- b) $m = 44, \quad n = 66, \quad k \in \{ \mathbf{16}, \mathbf{94} \}$
- c) $m = 1, \quad n = 2, \quad k \in \{ \mathbf{51}, \mathbf{52} \}$
- d) $m = 17, \quad n = 29, \quad k \in \{ \mathbf{67}, \mathbf{79} \}$

11. Dla podanej liczby d podać zbiór wszystkich liczb całkowitych nieujemnych k o następującej własności:

Istnieje postęp geometryczny 20-wyrazowy o wyrazach całkowitych dodatnich, który ma dokładnie k wyrazów podzielnych przez d .

- a) $d = 28, \quad k \in \{ \mathbf{0}, \mathbf{17}, \mathbf{18}, \mathbf{19}, \mathbf{20} \}$
- b) $d = 23, \quad k \in \{ \mathbf{0}, \mathbf{19}, \mathbf{20} \}$
- c) $d = 25, \quad k \in \{ \mathbf{0}, \mathbf{18}, \mathbf{19}, \mathbf{20} \}$
- d) $d = 27, \quad k \in \{ \mathbf{0}, \mathbf{17}, \mathbf{18}, \mathbf{19}, \mathbf{20} \}$

12. Dla podanej liczby d podać zbiór wszystkich liczb całkowitych nieujemnych k o następującej własności:

Istnieje postęp geometryczny 20-wyrazowy o wyrazach całkowitych dodatnich, który ma dokładnie k wyrazów podzielnych przez d .

- a) $d = 900, \quad k \in \{ \mathbf{0}, \mathbf{16}, \mathbf{17}, \mathbf{18}, \mathbf{19}, \mathbf{20} \}$
- b) $d = 27000, \quad k \in \{ \mathbf{0}, \mathbf{14}, \mathbf{15}, \mathbf{16}, \mathbf{17}, \mathbf{18}, \mathbf{19}, \mathbf{20} \}$
- c) $d = 210, \quad k \in \{ \mathbf{0}, \mathbf{18}, \mathbf{19}, \mathbf{20} \}$
- d) $d = 30, \quad k \in \{ \mathbf{0}, \mathbf{18}, \mathbf{19}, \mathbf{20} \}$