

Podzielność, cechy podzielności, liczby pierwsze, największy wspólny dzielnik, najmniejsza wspólna wielokrotność.

W dniu 25 lutego 2014 r. omawiamy test kwalifikacyjny.

Uwaga: Przyjmujemy, że 0 nie jest liczbą naturalną, tzn. liczby naturalne są to liczby całkowite dodatnie.

26.02.2014 (grupa 1) - do samodzielnego rozwiązania dla pozostałych studentów

1. Sformułować uogólnione cechy podzielności (tzn. w postaci: liczba przy dzieleniu przez coś daje taką samą resztę, jaką daje ...) przez 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 16, 25, 50, 125, 32.

2. Sformułować cechy podzielności przez 6, 12, 24, 15, 45, 18, 36.

3. W liczbie $3?20000001?5$ wpisać w miejsce obu znaków zapytania taką samą cyfrę tak, aby otrzymać liczbę podzielną przez 75. Podać wszystkie rozwiązania.

4. W liczbie $3120000001??$ wpisać w miejsce znaków zapytania takie cyfry (mogą być różne), aby otrzymać liczbę dającą przy dzieleniu przez 72 resztę 5. Podać wszystkie rozwiązania.

5. O liczbie naturalnej wiadomo, że jej suma cyfr jest równa 2013. Czy ta liczba może/musi być podzielna przez 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 25, 27, 45, 75?

6. O liczbie naturalnej wiadomo, że jej suma cyfr jest równa 2014. Czy ta liczba może/musi być podzielna przez 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 25, 27, 45, 75?

7. O liczbie naturalnej wiadomo, że jej suma cyfr jest równa 2016. Czy ta liczba może/musi być podzielna przez 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 25, 27, 45, 75?

8. O liczbie naturalnej wiadomo, że jej trzycyfrowa końcówka jest równa 120. Czy ta liczba może/musi być podzielna przez 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 25, 27, 45, 75?

9. O liczbie naturalnej wiadomo, że jej trzycyfrowa końcówka jest równa 124. Czy ta liczba może/musi być podzielna przez 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 25, 27, 45, 75?

10. O liczbie naturalnej wiadomo, że jej trzycyfrowa końcówka jest równa 125. Czy ta liczba może/musi być podzielna przez 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 25, 27, 45, 75?

Ćwiczenia 27/28.02.2014

11. Dane są liczby naturalne m, n . Wówczas dla dowolnej liczby naturalnej k , liczba k jest podzielna jednocześnie przez m oraz n wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzielna przez

Ponadto, jeżeli, to dla dowolnej liczby naturalnej k , liczba k jest podzielna jednocześnie przez m oraz n wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzielna przez mn .

12. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne d , dla których prawdziwa jest następująca cecha podzielności przez d :

Dla dowolnej liczby naturalnej k , liczba k jest podzielna przez d wtedy i tylko wtedy, gdy liczba utworzona przez dwie ostatnie cyfry liczby k jest podzielna przez d .

13. Jakie reszty może dawać kwadrat liczby całkowitej przy dzieleniu przez 3? Przez 8? Przez 5?

14. Jakie reszty może dawać sześcián liczby całkowitej przy dzieleniu przez 7? Przez 9?

15. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne $n > 1$, dla których liczba $n^2 - 1$ jest pierwsza.

16. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p , dla których liczba $3p + 1$ jest pierwsza.

17. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p , dla których liczba $p^2 + 2$ jest pierwsza.

28.02.2014 (grupa 1) - do samodzielnego rozwiązania dla pozostałych studentów

18. Obliczyć $\text{NWD}(24!, 24^{24})$.

19. Obliczyć $\text{NWW}(12^{12}, 18^{18})$.

20. Niech $a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^9$, $b = 2^6 \cdot 3^{11} \cdot 5^5$, $c = 2^{10} \cdot 3^3 \cdot 7^2$.
Obliczyć $\text{NWD}(a, b, c)$ oraz $\text{NWW}(a, b, c)$.

21. Niech $a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 6^9$, $b = 2^6 \cdot 3^{11} \cdot 4^5$, $c = 2^{10} \cdot 3^3 \cdot 10^2$.
Obliczyć $\text{NWD}(a, b, c)$ oraz $\text{NWW}(a, b, c)$.

22. Ile zer końcowych ma liczba $33!$?

23. Która liczba jest większa, $2^{23} \cdot 18^{10}$ czy $12^{15} \cdot 3^7$?

24. Obliczyć

a) $\text{NWD}(254678914^{37}, 10^{43})$

b) $\text{NWD}(472851364^{43}, 2^{50})$

c) $\text{NWD}(100000008^{25}, 12^{16})$

d) $\text{NWD}(100000011^{44}, 300^{300})$

e) $\text{NWD}(200000004^{31}, 24^{24})$

f) $\text{NWD}(18465210275^{44}, 10^{47})$

g) $\text{NWD}(7771428426328^{60}, 14^{37})$

h) $\text{NWD}(1122334455666^{50}, 44^{37})$

i) $\text{NWD}(12468945716272^{29}, 14^{17}, 330^{23})$

j) $\text{NWD}(1352263965789126^{44}, 26^{19}, 39^{22})$

Ćwiczenia 4.03.2014

25. Czy istnieją liczby naturalne m, n spełniające równanie

$$6^m = 12^n ?$$

26. Czy istnieją liczby naturalne m, n, k spełniające równanie

$$6^m \cdot 12^n = 18^k ?$$

27. Czy istnieją liczby naturalne m, n, k spełniające równanie

$$18^m \cdot 24^n = 12^k ?$$

28. Wskazać takie liczby naturalne m, n , że

$$m^3 n^4 = 2^{11} \cdot 3^7 \cdot 5^{13}.$$

29. Ile zer końcowych ma liczba $1000!$?

30. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne d o następującej własności: Dla dowolnych liczb naturalnych m, n , jeżeli iloczyn mn jest podzielny przez 7, to co najmniej jedna z liczb m, n jest podzielna przez d .

31. To samo z liczbą 24 zamiast 7.

32. Dowieść, że liczba naturalna o sumie cyfr równej 47 nie może być ani kwadratem, ani sześcianem liczby całkowitej.

33. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $n^2 - n$ jest parzysta, liczba $n^3 - n$ jest podzielna przez 6, a liczba $n^5 - n$ jest podzielna przez 30.

Wskazówka: $n^5 - n = (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) + \text{coś}$.

5.03.2014 (grupa 1) - do samodzielnego rozwiązania dla pozostałych studentów

34. Dla podanej liczby n wskazać największą liczbę całkowitą nieujemną k , dla której liczba n jest podzielna przez 4^k .

- a) $n = 1112854710^{25}$, $k = \dots$;
- b) $n = 1112854711^{16}$, $k = \dots$;
- c) $n = 285470004^{19}$, $k = \dots$;
- d) $n = 285470024^{21}$, $k = \dots$.

35. Dla podanej liczby n wskazać największą liczbę całkowitą nieujemną k , dla której liczba n jest podzielna przez 8^k .

- a) $n = 123456789200037^{37}$, $k = \dots$;
- b) $n = 123456789200038^{40}$, $k = \dots$;
- c) $n = 123456789200048^{45}$, $k = \dots$;
- d) $n = 123456789200060^{50}$, $k = \dots$.

36. Podać największy wspólny dzielnik liczb

- a) $\text{NWD}(20!, 21^3) = \dots$;
- b) $\text{NWD}(21!, 22^3) = \dots$;
- c) $\text{NWD}(22!, 23^3) = \dots$;
- d) $\text{NWD}(23!, 24^3) = \dots$.

37. Dla podanej liczby s podać największą liczbę całkowitą dodatnią d o następującej własności: Każda liczba całkowita dodatnia o sumie cyfr równej s jest podzielna przez d .

- a) $s = 15$, $d = \dots$;
- b) $s = 16$, $d = \dots$;
- c) $s = 17$, $d = \dots$;
- d) $s = 18$, $d = \dots$.

38. Dla podanej liczby k podać największą liczbę całkowitą dodatnią d o następującej własności: Każda liczba całkowita dodatnia o dwucyfrowej końcówce równej k jest podzielna przez d .

- a) $k = 15$, $d = \dots$;
- b) $k = 16$, $d = \dots$;
- c) $k = 17$, $d = \dots$;
- d) $k = 18$, $d = \dots$.

39. Podać największy wspólny dzielnik.

- a) $\text{NWD}(1234000050, 900) = \dots$;
- b) $\text{NWD}(1234000051, 900) = \dots$;
- c) $\text{NWD}(1234000052, 900) = \dots$;
- d) $\text{NWD}(1234000053, 900) = \dots$.

40. Podać największy wspólny dzielnik.

- a) $\text{NWD}(25!, 26^2) = \dots$;
- b) $\text{NWD}(26!, 27^2) = \dots$;
- c) $\text{NWD}(27!, 28^2) = \dots$;
- d) $\text{NWD}(28!, 29^2) = \dots$.

41. Podać największy wspólny dzielnik.

- a) $\text{NWD}(7!, 8^2) = \dots$;
- b) $\text{NWD}(8!, 9^2) = \dots$;
- c) $\text{NWD}(15!, 16^3) = \dots$;
- d) $\text{NWD}(24!, 25^3) = \dots$.

Ćwiczenia 6/7.03.2014

42. Połączyć podane warunki w grupy warunków równoważnych dla dowolnej liczby naturalnej n .

- a) liczba n jest nieparzysta
- b) liczba n jest względnie pierwsza z 6
- c) jedna z liczb $n-1$, $n+1$ jest podzielna przez 4
- d) jedna z liczb $n-1$, $n+1$ jest podzielna przez 6
- e) jedna z liczb $n-1$, $n+1$ jest podzielna przez 8
- f) liczba n^2-1 jest podzielna przez 4
- g) liczba n^2-1 jest podzielna przez 8
- h) liczba n^2-1 jest podzielna przez 12
- i) liczba n^2-1 jest podzielna przez 16
- j) liczba n^2-1 jest podzielna przez 24

43. Dowieść, że w ciągu 1, 2, 4, 8, 16, 23, 28, ..., w którym każdy kolejny wyraz powstaje z poprzedniego przez dodanie sumy cyfr, nie występuje liczba 2013.

44. Niech $n!! = n(n-2)(n-4)\dots$ będzie iloczynem liczb naturalnych nie większych od n i będących tej samej parzystości, co n . Ile zer końcowych mają liczby $34!!$ oraz $35!!$?

45. Wskazać najmniejszą (o ile taka w ogóle istnieje) liczbę naturalną k , dla której podane wyrażenie jest prawdziwe dla dowolnych liczb naturalnych m, n i (ewentualnie) r .

- a) $3^k | mn \Rightarrow (3^3 | m \vee 3^3 | n)$
 b) $5^k | mn \Rightarrow (5^2 | m \vee 5^7 | n)$
 c) $7^k | mnr \Rightarrow (7^5 | m \vee 7^3 | n \vee 7^{12} | r)$
 d) $4^k | mnr \Rightarrow (4^5 | m \vee 4^3 | n \vee 4^{12} | r)$
 e) $6^k | mnr \Rightarrow (6^5 | m \vee 6^3 | n \vee 6^{12} | r)$

46. Uporządkować podane liczby w kolejności rosnącej

$$a = 90 \cdot 60^9, \quad b = 15^3 \cdot 120^7, \quad c = 2^7 \cdot 30^{11}, \quad d = 60^{10}$$

$$e = 40^6 \cdot 45^5, \quad f = 72^6 \cdot 5^{10}, \quad g = 5^{11} \cdot 50000^2$$

7.03.2014 (grupa 1) - do samodzielnego rozwiązania dla pozostałych studentów

47. Dla podanej liczby n podać najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią k taką, że liczba nk jest kwadratem liczby całkowitej.

- a) $n = 2^{2010} \cdot 3^{2010} \cdot 5^{2013}$, $k = \dots$;
 b) $n = 2^{2011} \cdot 3^{2013} \cdot 5^{2014}$, $k = \dots$;
 c) $n = 2^{2012} \cdot 3^{2014} \cdot 5^{2015}$, $k = \dots$;
 d) $n = 2^{2013} \cdot 3^{2016} \cdot 5^{2016}$, $k = \dots$.

48. Dla podanej liczby n podać najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią k taką, że liczba nk jest sześcianem liczby całkowitej.

- a) $n = 2^{2010} \cdot 3^{2010} \cdot 5^{2013}$, $k = \dots$;
 b) $n = 2^{2011} \cdot 3^{2013} \cdot 5^{2014}$, $k = \dots$;
 c) $n = 2^{2012} \cdot 3^{2014} \cdot 5^{2015}$, $k = \dots$;
 d) $n = 2^{2013} \cdot 3^{2016} \cdot 5^{2016}$, $k = \dots$.

49. Dla podanej liczby n podać najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią k taką, że liczba nk jest sześcianem liczby całkowitej.

- a) $n = 12^{2014}$, $k = \dots$;
 b) $n = 12^{2015}$, $k = \dots$;
 c) $n = 12^{2016}$, $k = \dots$;
 d) $n = 12^{2017}$, $k = \dots$.

50. Dla podanej liczby n podać najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią k taką, że liczba nk jest czwartą potęgą liczby całkowitej.

- a) $n = 24^{2013}$, $k = \dots$;
 b) $n = 24^{2014}$, $k = \dots$;
 c) $n = 24^{2015}$, $k = \dots$;
 d) $n = 24^{2016}$, $k = \dots$.

51. Wypisać w kolejności rosnącej wszystkie takie liczby naturalne n , że

- a) $20 < n < 30$, a liczba n^n jest kwadratem liczby całkowitej
- b) $20 < n < 30$, a liczba n^n jest sześcianem liczby całkowitej
- c) $30 < n < 40$, a liczba n^n jest czwartą potęgą liczby całkowitej
- d) $30 < n < 40$, a liczba n^n jest piątą potęgą liczby całkowitej

52. Dla podanej liczby n podać największą liczbę całkowitą dodatnią d , dla której liczba $n!$ jest podzielna przez d^6 .

- a) $n = 10$, $d = \dots$;
- b) $n = 15$, $d = \dots$;
- c) $n = 20$, $d = \dots$;
- d) $n = 25$, $d = \dots$.

53. Podać największy wspólny dzielnik, gdzie $n!! = n(n-2)(n-4)\dots$ jest iloczynem liczb całkowitych dodatnich nie większych od n i będących tej samej parzystości, co n .

- a) $\text{NWD}(24!!, 25^2) = \dots$;
- b) $\text{NWD}(26!!, 27^2) = \dots$;
- c) $\text{NWD}(27!!, 28^2) = \dots$;
- d) $\text{NWD}(29!!, 30^2) = \dots$.

54. Dla podanej liczby naturalnej n podać największą liczbę naturalną k taką, że liczba n jest podzielna przez 125^k .

- a) $n = 20142014120142015^{11}$, $k = \dots$;
- b) $n = 20142014120142025^{22}$, $k = \dots$;
- c) $n = 20142014120142075^{33}$, $k = \dots$;
- d) $n = 20142014120142080^{44}$, $k = \dots$.

Ćwiczenia 11.03.2014

55. Pani napisała na tablicy pewną liczbę naturalną. Troje uczniów spostrzegło i wypowiedziało pewne własności napisanej liczby. Niestety, tylko dwóch uczniów podało własności poprawne, a trzeci uczeń się pomylił. Który uczeń popełnił błąd?

Wersja I

Pankracy: Napisana liczba jest kwadratem liczby całkowitej.

Serwacy: Suma cyfr napisanej liczby jest równa 38.

Bonifacy: Napisana liczba przy dzieleniu przez 9 daje resztę 2.

Wersja II

Pankracy: Napisana liczba jest kwadratem liczby całkowitej.

Serwacy: Suma cyfr napisanej liczby jest równa 32.

Bonifacy: Napisana liczba przy dzieleniu przez 9 daje resztę 7.

Wersja III

Pankracy: Napisana liczba jest kwadratem liczby całkowitej.

Serwacy: Suma cyfr napisanej liczby jest równa 19.

Bonifacy: Napisana liczba przy dzieleniu przez 9 daje resztę 3.

Wersja IV

Pankracy: Napisana liczba jest kwadratem liczby całkowitej.

Serwacy: Suma cyfr napisanej liczby jest równa 2004.

Bonifacy: Napisana liczba kończy się cyframi 2005.

Wersja V

Pankracy: Napisana liczba jest sześcianem liczby całkowitej.

Serwacy: Napisana liczba kończy się cyframi 444.

Bonifacy: Napisana liczba jest nieparzysta.

Wersja VI

Pankracy: Napisana liczba jest sześcianem liczby całkowitej.

Serwacy: Napisana liczba kończy się cyframi 2222.

Bonifacy: Suma cyfr napisanej liczby jest równa 43.

56. W miejsce kropek wstawić największą/najmniejszą (cokolwiek jest sensowne) liczbę, przy której podana implikacja jest prawdziwa dla dowolnej liczby naturalnej n

a) $24|n^2 \Rightarrow \dots\dots|n^2$

b) $18|n^3 \Rightarrow \dots\dots|n^3$

c) $60|n^5 \Rightarrow \dots\dots|n^5$

d) $n^2|24 \Rightarrow n^2|\dots\dots$

e) $n^3|10! \Rightarrow n^3|\dots\dots$

f) $54|n^2 \Rightarrow \dots\dots|n^3$

g) $n^5|12^8 \Rightarrow n|\dots\dots$

h) $8^8|n^{10} \Rightarrow \dots\dots|n$

12.03.2014 (grupa 1) - do samodzielnego rozwiązania dla pozostałych studentów

57. Dla podanej liczby d wskazać najmniejszą taką liczbę naturalną k , że dla dowolnych liczb naturalnych m, n zachodzi wyrażenie:

$$d^k|mn \Rightarrow (d^3|m \vee d^4|n).$$

Napisać **NIE**, gdy taka liczba k nie istnieje.

a) $d=8, \quad k=\dots\dots\dots$;

b) $d=9, \quad k=\dots\dots\dots$;

c) $d=10, \quad k=\dots\dots\dots$;

d) $d=11, \quad k=\dots\dots\dots$.

58. Rozważamy ciąg 3, 6, 12, 15, 21, 24, 30, 33, 39, 51, ..., w którym każdy kolejny wyraz powstaje z poprzedniego przez dodanie sumy cyfr. Wiadomo, że dla każdej pary poniższych liczb a, b w ciągu tym występuje dokładnie jedna liczba naturalna n spełniająca nierówność $a \leq n \leq b$. Wskazać tę liczbę.

a) $a=1305, \quad b=1310, \quad n=\dots\dots\dots$;

b) $a=2005, \quad b=2010, \quad n=\dots\dots\dots$;

c) $a=3005, \quad b=3010, \quad n=\dots\dots\dots$;

d) $a=4005, \quad b=4010, \quad n=\dots\dots\dots$.

59. Dla podanej liczby naturalnej n wskazać liczbę naturalną $d < 100$, która jest dzielnikiem liczby n , a ponadto jest liczbą złożoną. Liczba n jest dziesięciocyfrowa, w jej zapisie dziesiętnym występuje 7 zer.

- a) $n = 1000000017$, $d = \dots$;
- b) $n = 1000000038$, $d = \dots$;
- c) $n = 1000000065$, $d = \dots$;
- d) $n = 1000000028$, $d = \dots$.

60. Dla podanej liczby naturalnej n wskazać największą liczbę naturalną k , dla której liczba n jest podzielna przez 12^k .

- a) $n = 8^8 \cdot 9^9$, $k = \dots$;
- b) $n = 16^{16} \cdot 9^9$, $k = \dots$;
- c) $n = 8^8 \cdot 18^{18}$, $k = \dots$;
- d) $n = 16^{16} \cdot 18^{18}$, $k = \dots$.

61. Dla podanej liczby naturalnej n podać największą liczbę naturalną k , dla której prawdziwe jest następujące zdanie: Dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich a, b , jeżeli iloczyn ab jest podzielny przez n , to co najmniej jeden z czynników a, b jest podzielny przez k .

- a) $n = 2^9 \cdot 29$, $k = \dots$;
- b) $n = 3^7 \cdot 101$, $k = \dots$;
- c) $n = 3^5 \cdot 29$, $k = \dots$;
- d) $n = 5^5 \cdot 101$, $k = \dots$.

62. Dla podanej liczby naturalnej n podać największą liczbę naturalną k , dla której prawdziwe jest następujące zdanie: Dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich a, b , jeżeli iloczyn ab jest podzielny przez n , to co najmniej jeden z czynników a, b jest podzielny przez k .

- a) $n = 2^9 \cdot 33$, $k = \dots$;
- b) $n = 2^9 \cdot 36$, $k = \dots$;
- c) $n = 2^9 \cdot 62$, $k = \dots$;
- d) $n = 2^9 \cdot 82$, $k = \dots$.

63. Dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich m, n, k , jeżeli iloczyn mnk jest podzielny przez D , to co najmniej jeden z czynników m, n, k jest podzielny przez d . Dla podanej liczby D wskazać największą liczbę całkowitą dodatnią d , dla której powyższe zdanie jest prawdziwe.

- a) $D = 2^3 \cdot 3^2$, $d = \dots$;
- b) $D = 2^4 \cdot 3^3$, $d = \dots$;
- c) $D = 2^9 \cdot 3^4$, $d = \dots$;
- d) $D = 2^{11} \cdot 3^7$, $d = \dots$.

64. Podać największy wspólny dzielnik i najmniejszą wspólną wielokrotność liczb

- a) $\text{NWD}(140!, 210!) = \dots$;
- b) $\text{NWW}(140!, 210!) = \dots$;
- c) $\text{NWD}(125!, 145!, 150!) = \dots$;
- d) $\text{NWW}(125!, 145!, 150!) = \dots$.

Ćwiczenia 13/14.03.2014

65. Wiadomo, że wśród następujących sześciu liczb

$$3465^2 - 2, \quad 3465^2 - 4, \quad 3465^2 - 8, \quad 3465^2 - 16, \quad 3465^2 - 32, \quad 3465^2 - 64$$

trzy są pierwsze, a trzy złożone. Które z podanych liczb są pierwsze?

66. Na potrzeby tego zadania, liczbę naturalną k nazwiemy *ładną*, jeżeli istnieje liczba naturalna, której kwadrat ma sumę cyfr równą k . Wiadomo, że wśród 11 kolejnych liczb naturalnych od 3010 do 3020 dokładnie 5 jest *ładnych*. Które z podanych liczb są *ładne*?

67. Na potrzeby tego zadania, liczbę naturalną k nazwiemy *fajną*, jeżeli istnieje liczba naturalna, której sześcian ma sumę cyfr równą k . Wiadomo, że wśród 11 kolejnych liczb naturalnych od 3010 do 3020 dokładnie 3 są *fajne*. Które z podanych liczb są *fajne*?

68. Dana jest liczba naturalna n . Niech D będzie zbiorem wszystkich dzielników naturalnych liczby n , a W zbiorem jej wszystkich wielokrotności. Czemu jest równa podana liczba, o ile istnieje?

- a) Największy wspólny dzielnik wszystkich liczb ze zbioru D .
- b) Najmniejsza wspólna wielokrotność wszystkich liczb ze zbioru D .
- c) Największy wspólny dzielnik wszystkich liczb ze zbioru W .
- d) Najmniejsza wspólna wielokrotność wszystkich liczb ze zbioru W .

69. Dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich m, n , jeżeli iloczyn mn jest podzielny przez d , to co najmniej jeden z czynników m, n jest podzielny przez d .

Dla których liczb naturalnych d powyższe zdanie jest prawdziwe?

70. Dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich m, n , jeżeli iloczyn mn jest podzielny przez d^2 , to co najmniej jeden z czynników m, n jest podzielny przez d .

Dla których liczb naturalnych d powyższe zdanie jest prawdziwe?

71. Dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich m, n, k , jeżeli iloczyn mnk jest podzielny przez d^2 , to co najmniej jeden z czynników m, n, k jest podzielny przez d .

Dla których liczb naturalnych d powyższe zdanie jest prawdziwe?

14.03.2014 (grupa 1) - powtórka przed kolokwium nr 1.

18.03.2014 – Kolokwium nr 1.

Ćwiczenia 20/21.03.2014 – omawiamy kolokwium nr 1.