

Logarytmy

9-11.04.2014 (grupa 1) - do samodzielnego nauczania dla pozostałych studentów

122. Zapisać zbiór rozwiązań podanej nierówności w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów (nie używać różnicy zbiorów).

- a) $(|\log_5 x| - 1)^2 < 1$,
- b) $(|\log_5 x| - 1)^3 < 1$,
- c) $(|\log_5 x| - 2)^4 > 1$,
- d) $(|\log_5 x| - 2)^5 > 1$,

123. Zapisać zbiór rozwiązań podanej nierówności w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów (nie używać różnicy zbiorów).

- a) $(\log_2 x - 2) \cdot (\log_3 x - 3) > 0$,
- b) $(\log_2 x - 3) \cdot (\log_3 x - 2) > 0$,
- c) $(\log_2 x - 3)^3 \cdot (\log_3 x - 2)^2 > 0$,
- d) $(\log_2 x - 3)^2 \cdot (\log_3 x - 2)^3 > 0$,

124. Zapisać zbiór rozwiązań podanej nierówności w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów (nie używać różnicy zbiorów).

- a) $\log_x 4 < 2$,
- b) $\log_x 4 < -2$,
- c) $\log_x 2 > 2$,
- d) $\log_x 2 > -1$,

125. Podać taką liczbę x , że

- a) $\log_2 3 = 2 \cdot \log_2 x$, $x = \dots$;
- b) $\log_2 3 = 2 + \log_2 x$, $x = \dots$;
- c) $3 \cdot \log_3 2 = \log_3 x$, $x = \dots$;
- d) $3 + \log_3 2 = \log_3 x$, $x = \dots$.

126. Niech $A(n) = 4^{4^n}$, $B(n) = 256^{16^n}$, $C(n) = \log_2 A(n)$, $D(n) = \log_2 B(n)$, $E(n) = \log_{C(n)} D(n)$. Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego:

- a) $E(100) = \dots$;
- b) $E(200) = \dots$;
- c) $E(300) = \dots$;
- d) $E(400) = \dots$.

127. Niech $A(n) = 4^{4^n}$, $B(n) = 256^{64^n}$, $C(n) = \log_2 A(n)$, $D(n) = \log_2 B(n)$, $E(n) = \log_{C(n)} D(n)$. Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego:

- a) $E(100) = \dots$;
- b) $E(200) = \dots$;
- c) $E(300) = \dots$;
- d) $E(400) = \dots$.

128. Dla podanej liczby n przyjąć za podstawę logarytmu $a = \sqrt[n]{n}$, a następnie zapisać liczbę $\log_a 2$ w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego

- a) $n = 2$, $\log_a 2 = \dots\dots\dots$;
- b) $n = 4$, $\log_a 2 = \dots\dots\dots$;
- c) $n = 8$, $\log_a 2 = \dots\dots\dots$;
- d) $n = 16$, $\log_a 2 = \dots\dots\dots$.

129. Podać wartość podanej liczby w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego, gdy podana liczba jest wymierna. Napisać **N**, jeśli podana liczba jest niewymierna.

- a) $\log_2 \log_2 4^{4^4} = \dots\dots\dots$;
- b) $\log_2 \log_2 4^{4^5} = \dots\dots\dots$;
- c) $\log_2 \log_2 4^{4^6} = \dots\dots\dots$;
- d) $\log_2 \log_2 4^{4^8} = \dots\dots\dots$.

130. Dla podanej liczby a wskazać taką liczbę rzeczywistą dodatnią b , aby spełniona była równość $1 + (\log_5 a) + \log_5 b = \log_5 (2a^2 + 2b^2)$.

- a) $a = 2$, $b = \dots\dots\dots$;
- b) $a = 3$, $b = \dots\dots\dots$;
- c) $a = 4$, $b = \dots\dots\dots$;
- d) $a = 6$, $b = \dots\dots\dots$.

131. Dla podanych liczb rzeczywistych x i y wskazać taką liczbę rzeczywistą dodatnią a , aby prawdziwa była równość $\log_a x = y$.

- a) $x = 16$, $y = 2$, $a = \dots\dots\dots$;
- b) $x = 16$, $y = -4$, $a = \dots\dots\dots$;
- c) $x = 2$, $y = 4$, $a = \dots\dots\dots$;
- d) $x = 2$, $y = -1/4$, $a = \dots\dots\dots$.

132. Dla podanych liczb a, b podać taką liczbę rzeczywistą c , aby zachodziła równość $\log_a b = \log_b c$.

- a) $a = 3$, $b = 9$, $c = \dots\dots\dots$;
- b) $a = 9$, $b = 3$, $c = \dots\dots\dots$;
- c) $a = 5^4$, $b = 5^6$, $c = \dots\dots\dots$;
- d) $a = 7^{5^4}$, $b = 7^{5^6}$, $c = \dots\dots\dots$.

133. Dla podanych liczb a, b zapisać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego wartość liczby $\log_x y$, gdzie $x = \log_a b$ oraz $y = \log_b a$. Napisać literkę **N**, jeżeli liczba ta jest niewymierna.

- a) $a = 2^{2^4}$, $b = 2^{2^6}$, $\log_x y = \dots\dots\dots$;
- b) $a = 2^{2^7}$, $b = 2^{2^{14}}$, $\log_x y = \dots\dots\dots$;
- c) $a = 2^{2^9}$, $b = 2^{2^{12}}$, $\log_x y = \dots\dots\dots$;
- d) $a = 2^{2^{16}}$, $b = 2^{2^{32}}$, $\log_x y = \dots\dots\dots$.

134. Niech $\prod_{i=m}^n a_i = a_m \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdot a_{m+3} \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$.

Zapisać wartość podanego iloczynu w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego, jeśli liczba jest wymierna. Napisać literkę **N**, jeżeli liczba jest niewymierna.

- a) $\prod_{i=1}^4 \log_{(3i+1)}(3i+4) = \dots$;
 b) $\prod_{i=2}^4 \log_{(3i+1)}(3i+4) = \dots$;
 c) $\prod_{i=2}^{15} \log_{(3i+1)}(3i+4) = \dots$;
 d) $\prod_{i=2}^{16} \log_{(3i+1)}(3i+4) = \dots$.

135. Podać zbiór rozwiązań nierówności zapisując go w postaci przedziału lub sumy przedziałów.

- a) $-\frac{1}{2} < \log_4 x < \frac{3}{2}$;
 b) $\frac{1}{3} < \log_{64} x < \frac{1}{2}$;
 c) $-\frac{3}{5} < \log_{32} x < \frac{4}{5}$;
 d) $-\frac{3}{2} < \log_9 x < \frac{1}{4}$

136. Podać zbiór rozwiązań nierówności zapisując go w postaci przedziału lub sumy przedziałów.

- a) $\frac{1}{2} < \log_x 8 < 3$;
 b) $-\frac{1}{2} < \log_x 9 < 2$;
 c) $-2 < \log_x 4 < \frac{1}{3}$;
 d) $-3 < \log_x 64 < -2$

137. Na potrzeby tego zadania, dla liczby rzeczywistej $a > 1$ zdefiniujemy średnią liczb rzeczywistych x, y większych od 1, następującym wzorem

$$S_a(x, y) = a^{\sqrt{\log_a x \cdot \log_a y}}.$$

Podać wartości następujących liczb w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego w przypadku liczb wymiernych. Wpisać literkę **N** w przypadku liczb niewymiernych.

- a) $S_8(2, 16) = \dots$;
 b) $S_9(2, 16) = \dots$;
 c) $S_8(3, 81) = \dots$;
 d) $S_9(3, 81) = \dots$.

Ćwiczenia 15, 25.04.2014 (grupa 2)**Ćwiczenia 15, 17.04.2014 (grupa 3)**

Uprościć wyrażenia

138. $4^{2+\log_2 7}$

139. $\log_{\sqrt{3}} 2 \cdot \log_5 9$

140. $\log_6 2 + \log_{36} 9$

141. $\frac{\log_m(mn) \cdot \log_n(mn)}{\log_m(mn) + \log_n(mn)}$ dla liczb naturalnych m i n większych od 1.

142. $\log_{(\sqrt{2}-1)}(\sqrt{2}+1)$

143. $2^{\log_3 5} - 5^{\log_3 2}$

144. Dla ilu trójek liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c różnych od 1 spełniona jest podana równość? Dla wszystkich? Dla żadnej? Dla niektórych (podać 3 przykłady, a jeśli przykładów jest mniej niż 3, podać wszystkie)?

a) $\log_a(bc) = (\log_a b) + \log_a c$

b) $\log_a(bc) = (\log_a b) \cdot \log_a c$

c) $\log_a(b+c) = (\log_a b) \cdot \log_a c$

d) $\log_a(b+c) = (\log_a b) + \log_a c$

e) $(\log_a b) \cdot \log_b c = \log_a c$

f) $\log_a(b^c) = c \cdot \log_a b$

145. Bez użycia kalkulatora rozstrzygnąć, która liczba jest większa:

a) $\log_2 7$ czy $\log_3 7$

b) $\log_{0,2} 7$ czy $\log_{0,3} 7$

c) $\log_2 7$ czy $\log_{0,3} 7$

d) $\log_{0,2} 7$ czy $\log_3 7$

e) $\log_2 0,7$ czy $\log_3 0,7$

f) $\log_{0,2} 0,7$ czy $\log_{0,3} 0,7$

g) $\log_2 0,7$ czy $\log_{0,3} 0,7$

h) $\log_{0,2} 0,7$ czy $\log_3 0,7$

i) $\log_9 27$ czy $\log_4 8$

j) $\log_3 8$ czy $\log_2 5$

k) $\log_5 127$ czy $\log_{10} 999$

l) $\log_3 100$ czy $\log_2 10$

m) $(\log_2 3) \cdot \log_5 7$ czy $(\log_2 7) \cdot \log_5 3$

n) $(\log_2 3) \cdot \log_7 5$ czy $(\log_7 9) \cdot \log_{16} 25$

o) $\log_2 3$ czy $\log_3 5$

p) $\log_3 7$ czy $\log_5 19$

q) $\log_2 3$ czy $\log_5 13$

r) $\log_3 5$ czy $\log_{15} 56$

Wskazówka do kilku ostatnich pytań:

Wiadomo, że wartość ułamka nie zmieni się, jeżeli licznik i mianownik pomnożymy przez tę samą liczbę różną od zera.

Podobnie, wartość logarytmu nie zmieni się, jeżeli podstawę i liczbę logarytmowaną

146. Czy jest prawdą, że $\log_2(a+b) = \log_2 a + \log_2 b$, jeżeli

- a) $a = 2, b = 2$
- b) $a = 3/2, b = 3$
- c) $a = 2, b = 3$
- d) $a = 3/2, b = 2$
- e) $a = 5, b = 5/4$

147. Czy jest prawdą, że $a \cdot \log_7 b = b \cdot \log_7 a$, jeżeli

- a) $a = 2, b = 3$
- b) $a = 2, b = 4$
- c) $a = 2, b = 5$
- d) $a = 3, b = 4$
- e) $a = 64/27, b = 256/81$

148. Czy jest prawdą, że

- a) $2 \cdot \log_3 5 = \log_3 10$
- b) $2 \cdot \log_3 5 = \log_3 25$
- c) $2 + \log_3 5 = \log_3 10$
- d) $2 + \log_3 5 = \log_3 45$
- e) $\sqrt{(2 - \log_3 7)^2} = 2 - \log_3 7$
- f) $\sqrt{(2 - \log_2 7)^2} = 2 - \log_2 7$
- g) $\sqrt{(2 - \log_5 23)^2} = 2 - \log_5 23$
- h) $\sqrt{(2 - \log_4 17)^2} = 2 - \log_4 17$

149. Rozwiązać nierówności

- a) $\log_{2x}(x^2 + 1) \leq \log_{2x}(x^2 + 3x)$
- b) $(x^2 + x + 1)^{3x} > (x^2 + x + 1)^{x+1}$
- c) $x^4 - 5x^2 + 4 < 0$
- d) $\log_2 x + \log_x 4 < 3$

Część całkowita i ułamkowa, funkcje trygonometryczne

Ćwiczenia 29.04.2014, 2.05.2014 (grupa 2)

Ćwiczenia 24,29.04.2014 (grupa 3)

Oznaczenia: Przypominam, że $[x]$ oraz $\{x\}$ oznaczają odpowiednio część całkowitą i część ułamkową liczby rzeczywistej x .

150. Podać przykład takiej liczby rzeczywistej x , że

- a) $[x] = -4, \{x\} < 1/10$
- b) $[x] = -4, \{x\} > 9/10$
- c) $2 \cdot \{x\} \neq \{2x\}, x < 0$
- d) $2 \cdot \{x\} = \{5x\}, x > 10, x \notin \mathbb{N}$

151. Podać przykład takich liczb rzeczywistych x, y , że

- a) $[x+y] \neq [x] + [y]$
- b) $[2x+y] = 2[x] + [y] + 2$
- c) $[x+y] = \{x\} + \{y\}, x, y > 0$
- d) $[xy] = [x] \cdot [y] + 10$

152. Wyznaczyć wszystkie takie liczby rzeczywiste a , że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi równość $[x+a] = [x] + a$.

153. Uporządkować podane liczby w kolejności niemalejącej.
 $\sin 50^\circ$, $\cos 80^\circ$, $\sin 170^\circ$, $\cos 200^\circ$, $\sin 250^\circ$, $\cos 280^\circ$.

154. Naskicować wykres funkcji f zdefiniowanej wzorem

- a) $f(x) = \sin 2x$
- b) $f(x) = \cos 3x$
- c) $f(x) = \sin(x/2)$
- d) $f(x) = \sin^2 x$
- e) $f(x) = \cos^2 x$
- f) $f(x) = (1 + \cos 2x)/2$
- g) $f(x) = (1 - \cos 2x)/2$
- h) $f(x) = 3 + 5 \cos x$
- i) $f(x) = \sin \pi x$

155. Która liczba jest większa?

- a) $\sin 1^\circ$ czy $\sin 1$
- b) $\sin 2^\circ$ czy $\sin 2$
- c) $\sin 3^\circ$ czy $\sin 3$
- d) $\sin 4^\circ$ czy $\sin 4$
- e) $\sin 5^\circ$ czy $\sin 5$
- f) $\sin 6^\circ$ czy $\sin 6$

156. Uprościć wyrażenie, w którym n przebiega liczby naturalne.

- a) $\sin n\pi$
- b) $\sin n^2\pi$
- c) $\cos n\pi$
- d) $\cos n^3\pi$
- e) $\cos(n^2 + n)\pi$
- f) $\sin((2n+1)\pi/2)$
- g) $\sin((2n-1)\pi/2)$

Dopuszczalne odpowiedzi: 1 , 0 , $(-1)^n$, $(-1)^{n+1}$.

157. Rozwiązać równania i nierówności.

- a) $\sin x \geq 1/2$
- b) $\cos x \leq 1/2$
- c) $\sin x \geq \cos x$
- d) $[4\sin^2 x] = 2$
- e) $\{\cos^2 x\} = 3/4$
- f) $\sqrt{1 + \cos x} = \sqrt{2} \cdot \cos(x/2)$
- g) $\sin^2 x + \cos^4 x = \cos^2 x + \sin^4 x$

158. Jaką najmniejszą i największą wartość przyjmuje wyrażenie

$$\sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x \cdot \cos 16x \quad ?$$

Ćwiczenia 30.04.2014 (grupa 3) – zadania 169-173

16.04.2014 (grupa 1) - do samodzielnego rozwiązania dla pozostałych studentów

159. Podać wartość wyrażenia, gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x .

- a) $\lceil \log_{\sqrt{2}} 6 \rceil = \dots\dots\dots$;
- b) $\lceil \log_{\sqrt{2}} 11 \rceil = \dots\dots\dots$;
- c) $\lceil \log_{\sqrt{2}} 12 \rceil = \dots\dots\dots$;
- d) $\lceil \log_{\sqrt{2}} 88 \rceil = \dots\dots\dots$.

160. Dla podanej liczby n podać najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią $m \neq n$ taką, że $\{\log_2 m\} = \{\log_2 n\}$, gdzie $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x .

- a) $n = 48, \quad m = \dots\dots\dots$;
- b) $n = 50, \quad m = \dots\dots\dots$;
- c) $n = 51, \quad m = \dots\dots\dots$;
- d) $n = 52, \quad m = \dots\dots\dots$.

161. Podać wartość wyrażenia, gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x .

- a) $\lceil \log_2 (\sqrt{6} - \sqrt{5}) \rceil = \dots\dots\dots$;
- b) $\lceil \log_2 (\sqrt{11} - \sqrt{10}) \rceil = \dots\dots\dots$;
- c) $\lceil \log_2 (\sqrt{31} - \sqrt{30}) \rceil = \dots\dots\dots$;
- d) $\lceil \log_2 (\sqrt{66} - \sqrt{65}) \rceil = \dots\dots\dots$.

162. Podać wartość wyrażenia, gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x .

- a) $\lceil \log_{\sqrt{2}} 3 \rceil = \dots\dots\dots$;
- b) $\lceil \log_{\sqrt{3}} 5 \rceil = \dots\dots\dots$;
- c) $\lceil \log_{\sqrt{2}} 5 \rceil = \dots\dots\dots$;
- d) $\lceil \log_{\sqrt{2}} 10 \rceil = \dots\dots\dots$.

163. Dla podanej liczby n podać najmniejszą liczbę **rzeczywistą** $x > 1$ taką, że $\{\log_2 x\} = \{\log_2 n\}$, gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y .

- a) $n = 48, \quad x = \dots\dots\dots$;
- b) $n = 5, \quad x = \dots\dots\dots$;
- c) $n = 20, \quad x = \dots\dots\dots$;
- d) $n = 18, \quad x = \dots\dots\dots$.

164. Dla podanej liczby naturalnej n podać **największą** liczbę **rzeczywistą** $x < 100$ taką, że $\{\log_2 x\} = \{\log_2 n\}$, gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y .

- a) $n = 11, \quad x = \dots\dots\dots$;
- b) $n = 21, \quad x = \dots\dots\dots$;
- c) $n = 41, \quad x = \dots\dots\dots$;
- d) $n = 124, \quad x = \dots\dots\dots$.

165. Podać wartość wyrażenia, gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x .

a) $\left[\frac{1}{4 - \sqrt{15}} \right] = \dots\dots\dots;$

b) $\left[\frac{1}{\sqrt{17} - 4} \right] = \dots\dots\dots;$

c) $\left[\frac{1}{5 - 2\sqrt{6}} \right] = \dots\dots\dots;$

d) $\left[\frac{1}{7 - 5\sqrt{2}} \right] = \dots\dots\dots.$

166. Dla podanej liczby naturalnej k podać **największą** liczbę **naturalną** n taką, że $[\log_k n] = [\log_k 27]$, gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x .

a) $k = 2, \quad n = \dots\dots\dots;$

b) $k = 3, \quad n = \dots\dots\dots;$

c) $k = 4, \quad n = \dots\dots\dots;$

d) $k = 5, \quad n = \dots\dots\dots.$

167. Podać przykład liczby niecałkowitej x spełniającej podane równanie, gdzie $[y]$ oraz $\{y\}$ oznaczają odpowiednio część całkowitą i ułamkową liczby y . Wynik podać w postaci ułamka dziesiętnego skończonego lub okresowego (taka postać odpowiedzi jest częścią zadania, więc wyniki poprawne, ale w innej postaci, nie będą uznawane).

a) $[x] = 3\{x\}, \quad x = \dots\dots\dots;$

b) $[x] = 4\{x\}, \quad x = \dots\dots\dots;$

c) $[x] = 5\{x\}, \quad x = \dots\dots\dots;$

d) $[x] = 6\{x\}, \quad x = \dots\dots\dots.$

168. Podać zbiór rozwiązań równania w postaci przedziału lub sumy przedziałów. Symbol $[y]$ oznacza część całkowitą liczby y .

a) $[|\log_3 \log_2 x|] = 0, \quad \dots\dots\dots;$

b) $[|\log_2 \log_3 x|] = 0, \quad \dots\dots\dots;$

c) $[|\log_3 \log_3 x|] = 1, \quad \dots\dots\dots;$

d) $[|\log_2 \log_2 x|] = 3, \quad \dots\dots\dots.$

23.04.2014 (grupa 1) - powtórka przed kolokwium nr 007

25.04.2014 (grupa 1) - kolokwium nr 007

Obowiązuje materiał od początku semestru (do zadania 168).

2.05.2014 (grupa 1)

Omówienie kolokwium 007, powtórka przed kolokwium 3.

6.05.2014 – kolokwium nr 3

Obowiązuje materiał od początku semestru (do zadania 168).

Ćwiczenia 9.05.2014 (gr. 2), 13.05.2014 (gr. 3) – omawiamy kolokwium nr 3

Podstawowe własności funkcji

Ćwiczenia 13.05.2014 (grupa 2), 30.04.2014 (grupa 3)

169. Dla funkcji f zdefiniowanej podanym wzorem oraz dla podanego zbioru Z rozstrzygnąć, czy funkcja f jest różnowartościowa na zbiorze Z oraz podać zbiór wartości funkcji f na zbiorze Z .

- a) $f(x) = x^2$, $Z = [-3, -1)$
- b) $f(x) = x^2$, $Z = (-3, 4]$
- c) $f(x) = x^2$, $Z = [-3, -2] \cup [3, 5]$
- d) $f(x) = x^2$, $Z = (-3, -2] \cup [3, 4)$
- e) $f(x) = x^2$, $Z = (0, 3)$
- f) $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $Z = (0, 3)$
- g) $f(x) = x^2 + 2x + 1$, $Z = (0, 3)$
- h) $f(x) = 2^x$, $Z = (-3, 3)$
- i) $f(x) = |2^x - 3|$, $Z = (-3, 3)$
- j) $f(x) = |2^x - 5|$, $Z = (-3, 3)$

170. Niech

$$f(x) = \left| \left[x + \frac{1}{2} \right] - x \right|.$$

Naszkicować wykres funkcji f oraz wykresy następujących funkcji

- a) $f_1(x) = f(2x)$
- b) $f_2(x) = f(x/2)$
- c) $f_3(x) = 2f(x)$
- d) $f_4(x) = f\left(x + \frac{1}{4}\right)$
- e) $f_5(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right)$
- f) $f_6(x) = f\left(x - \frac{1}{2}\right)$
- g) $f_7(x) = \frac{1}{2} - f(x)$
- h) $f_8(x) = f\left(\left|x - \frac{1}{4}\right|\right)$
- i) $f_9(x) = \left|f\left(x - \frac{1}{4}\right)\right|$
- j) $f_{10}(x) = \frac{f(2x)}{2}$
- k) $f_{11}(x) = f(x) + x$
- l) $f_{12}(x) = 5f(x) + 3x$

171. Czy funkcja f zdefiniowana podanym wzorem jest parzysta? Nieparzysta?

- a) $f(x) = 0$
- b) $f(x) = 37$
- c) $f(x) = 2x$
- d) $f(x) = 2x^2 + 1$
- e) $f(x) = 14x^5 + 6x^3$
- f) $f(x) = x^6 + x^5$

- g)** $f(x) = \sin^{37} x \cdot \cos^{24} x$
h) $f(x) = \sin^{24} x \cdot \cos^{37} x$
i) $f(x) = x^{111} \cdot \sin^{24} x \cdot \cos^{37} x$
j) $f(x) = x^{111} \cdot \sin^{37} x \cdot \cos^{24} x$
k) $f(x) = x^{666} \cdot \sin^{24} x \cdot \cos^{37} x$
l) $f(x) = x^{666} \cdot \sin^{37} x \cdot \cos^{24} x$
m) $f(x) = \sin x^{37}$
n) $f(x) = \sin x^{24}$
o) $f(x) = \cos x^{37}$
p) $f(x) = \cos x^{24}$
q) $f(x) = (x^2 + 1) \sin x$
r) $f(x) = (x^2 + 1) \cos x$
s) $f(x) = (x^3 + 1) \sin x$
t) $f(x) = (x^3 + 1) \cos x$

172. Dla każdej z liczb $i \in \{1, 2, \dots, 13\}$ wskazać taką liczbę $j \in \{1, 2, \dots, 13\}$, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x

$$f_j(f_i(x)) = x.$$

- $f_1(x) = 37 + x$
 $f_2(x) = 37 - x$
 $f_3(x) = x - 37$
 $f_4(x) = 3x - 2$
 $f_5(x) = 3x - 4$
 $f_6(x) = 3x - 6$
 $f_7(x) = \frac{x}{3} + 2$
 $f_8(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}$
 $f_9(x) = \frac{x}{3} + \frac{4}{3}$
 $f_{10}(x) = -\frac{5}{4}x + \frac{3}{4}|x|$
 $f_{11}(x) = -\frac{5}{4}x - \frac{3}{4}|x|$
 $f_{12}(x) = \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}|x|$
 $f_{13}(x) = \frac{5}{4}x - \frac{3}{4}|x|$

173. Funkcja f spełnia warunki

$$f(3 - x) = f(x), \quad f(6 - x) = f(x)$$

dla dowolnej liczby rzeczywistej x . Dowieść, że funkcja f jest okresowa i parzysta.