Egzamin, 2.02.2016, godz. 9:00-13:20

Zadanie **11.** **(10 punktów)**

W każdym z zadań **11.1-11.10** podaj (w postaci uproszczonej) kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** albo **NIE**).
Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty=\infty$.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz **1 punkt**.
Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz przynależność jednego z nich do zbioru, otrzymasz **0,5 punktu**.
Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.

$\mathbb{N}=\{1,2,3,4,5,\ldots\}$ oznacza zbiór liczb naturalnych (całkowitych dodatnich).

11.1. $A=\left\{(x-2)^2 : x\in(0,3)\right\}$ Ocena ....

$\inf A=\mathbf{0}$ $\sup A=\mathbf{4}$

Czy kres dolny należy do zbioru A **TAK** Czy kres górny należy do zbioru A **NIE**

11.2. $B=\left\{(x-2)^3 : x\in(0,3)\right\}$ Ocena ....

$\inf B=\mathbf{-8}$ $\sup B=\mathbf{1}$

Czy kres dolny należy do zbioru B **NIE** Czy kres górny należy do zbioru B **NIE**

11.3. $C=\left\{(x-2)^4 : x\in(0,3)\right\}$ Ocena ....

$\inf C=\mathbf{0}$ $\sup C=\mathbf{16}$

Czy kres dolny należy do zbioru C **TAK** Czy kres górny należy do zbioru C **NIE**

11.4. $D=\left\{(x-2)^5 : x\in(0,3)\right\}$ Ocena ....

$\inf D=\mathbf{-32}$ $\sup D=\mathbf{1}$

Czy kres dolny należy do zbioru D **NIE** Czy kres górny należy do zbioru D **NIE**

11.5. $E=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N} \wedge 4n^2\leqslant 8m^2\leqslant 16n^2\right\}$ Ocena ....

$\inf E = \mathbf{1/\sqrt{2}=\sqrt{2}/2}$ $\sup E=\mathbf{\sqrt{2}}$

Czy kres dolny należy do zbioru E **NIE** Czy kres górny należy do zbioru E **NIE**

11.6. $F=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N} \wedge 4n^2\leqslant 9m^2\leqslant 16n^2\right\}$ Ocena ....

$\inf F = \mathbf{2/3}$ $\sup F=\mathbf{4/3}$

Czy kres dolny należy do zbioru F **TAK** Czy kres górny należy do zbioru F **TAK**

11.7. $G=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N} \wedge 25n^2\leqslant 9m^2\leqslant 27n^2\right\}$ Ocena ....

$\inf G = \mathbf{5/3}$ $\sup G=\mathbf{\sqrt{3}}$

Czy kres dolny należy do zbioru G **TAK** Czy kres górny należy do zbioru G **NIE**

11.8. $H=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N} \wedge 4^n\leqslant 8^m\leqslant 16^n\right\}$ Ocena ....

$\inf H = \mathbf{2/3}$ $\sup H=\mathbf{4/3}$

Czy kres dolny należy do zbioru H **TAK** Czy kres górny należy do zbioru H **TAK**

11.9. $I=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N} \wedge 4^n\leqslant 9^m\leqslant 16^n\right\}$ Ocena ....

$\inf I = \mathbf{\log_3 2=\log_9 4}$ $\sup I=\mathbf{\log_3 4=\log_9 16}$

Czy kres dolny należy do zbioru I **NIE** Czy kres górny należy do zbioru I **NIE**

11.10. $J=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N} \wedge 25^n\leqslant 9^m\leqslant 27^n\right\}$ Ocena ....

$\inf J = \mathbf{\log_3 5=\log_9 25}$ $\sup J=\mathbf{3/2}$

Czy kres dolny należy do zbioru J **NIE** Czy kres górny należy do zbioru J **TAK**

Zadanie **12.** **(10 punktów)**
W każdym z zadań **12.1-12.10** podaj dziedzinę funkcji f określonej podanym wzorem.
Za każdą poprawnie podaną dziedzinę otrzymasz **1 punkt.**

12.1. $f(x)=\sqrt{(x-64)\cdot(x^2-64)}$ $D_f=[\mathbf{-8,\ 8}]\cup[\mathbf{64,\ +\infty})$

12.2. $f(x)=\sqrt{(x^2-64)\cdot(x^3-64)}$ $D_f=[\mathbf{-8,\ 4}]\cup[\mathbf{8,\ +\infty})$

12.3. $f(x)=\sqrt{(x^3-64)\cdot(x^6-64)}$ $D_f=[\mathbf{-2,\ 2}]\cup[\mathbf{4,\ +\infty})$

12.4. $f(x)=\sqrt{(x^6-64)\cdot(2^x-64)}$ $D_f=[\mathbf{-2,\ 2}]\cup[\mathbf{6,\ +\infty})$

12.5. $f(x)=\sqrt{(2^x-64)\cdot(x-64)}$ $D_f=(\mathbf{-\infty,\ 6}]\cup[\mathbf{64,\ +\infty})$

12.6. $f(x)=\sqrt{(x-64)^2\cdot(x^3-64)}$ $D_f=[\mathbf{4,\ +\infty})$

12.7. $f(x)=\sqrt{(x^2-64)^2\cdot(x^6-64)}$ $D_f=(\mathbf{-\infty\ \ -2}]\cup[\mathbf{2,\ +\infty})$

12.8. $f(x)=\sqrt{(x^3-64)^2\cdot(2^x-64)}$ $D_f=\mathbf{\{4\}}\cup[\mathbf{6,\ +\infty})$

12.9. $f(x)=\sqrt{(x^6-64)^2\cdot(x-64)}$ $D_f=\mathbf{\{-2\}}\cup\mathbf{\{2\}}\cup[\mathbf{64,\ +\infty})$

12.10. $f(x)=\sqrt{(2^x-64)^2\cdot(x^2-64)}$ $D_f=(\mathbf{-\infty,\ -8}]\cup\mathbf{\{6\}}\cup[\mathbf{8,\ +\infty})$

Zadanie **13. (10 punktów)**

Dowieść, że liczba $\log_{20}4000$ jest niewymierna.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\log_{20}4000$ jest wymierna i niech m/n będzie jej przedstawieniem w postaci ilorazu liczb naturalnych (zauważmy, że jest to liczba dodatnia). Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\log_{20}4000=\frac{m}{n}$$
$$20^{m/n}=4000$$
$$20^m=4000^n\,.$$

Rozkładając obie strony powyższej równości na iloczyny potęg liczb pierwszych otrzymujemy

$$2^{2m}\cdot 5^m=2^{5n}\cdot 5^{3n}\,.$$

Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze wynika, że wykładniki przy odpowiednich potęgach liczb pierwszych po obu stronach równości są równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} 2m &= 5n \\ m &= 3n \end{cases}$$

Jednak powyższy układ równań nie ma rozwiązania w liczbach dodatnich m, n, gdyż wówczas mielibyśmy

$$2m=2\cdot 3n=6n>5n=2m\,.$$

Możliwa jest też inna argumentacja: rozwiązujemy powyższy układ równań w liczbach rzeczywistych otrzymując jedyne rozwiązanie $m=n=0$ i stwierdzamy, że nie jest to rozwiązanie w liczbach naturalnych.

Doszliśmy więc do sprzeczności z założeniem, że liczba $\log_{20}4000$ jest wymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $\log_{20}4000$ jest niewymierna.

Zadanie **14. (10 punktów)**
Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem
$$f(x)=x+\left|x^2-6\right|$$
na przedziale $[-4, 3]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.
Rozwiązanie:
Zauważmy, że
$$\left|x^2-6\right|=\begin{cases} x^2-6 & \text{dla } x\in\left(-\infty, -\sqrt{6}\right]\cup\left[\sqrt{6}, +\infty\right) \\ -x^2+6 & \text{dla } x\in\left(-\sqrt{6}, \sqrt{6}\right) \end{cases}$$
a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci
$$f(x)=\begin{cases} x+x^2-6 & \text{dla } x\in\left[-4, -\sqrt{6}\right]\cup\left[\sqrt{6}, 3\right] \\ x-x^2+6 & \text{dla } x\in\left(-\sqrt{6}, \sqrt{6}\right) \end{cases}$$
W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $[-4, 3]$ jest dana wzorem
$$f'(x)=\begin{cases} 1+2x & \text{dla } x\in\left(-4, -\sqrt{6}\right)\cup\left(\sqrt{6}, 3\right) \\ 1-2x & \text{dla } x\in\left(-\sqrt{6}, \sqrt{6}\right) \end{cases}$$
W punktach $-\sqrt{6}$ i $\sqrt{6}$ pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć te punkty do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f.

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x\in\left(-4, -\sqrt{6}\right)\cup\left(\sqrt{6}, 3\right)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do równania $1+2x=0$, co ma rozwiązanie $x=-1/2$, które jednak nie należy do rozważanego zbioru $\left(-4, -\sqrt{6}\right)\cup\left(\sqrt{6}, 3\right)$.

2° W przypadku $x\in\left(-\sqrt{6}, \sqrt{6}\right)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do $1-2x=0$, co ma rozwiązanie $x=1/2$, które należy do rozważanego przedziału $\left(-\sqrt{6}, \sqrt{6}\right)$.

Porównamy wartości funkcji f w pięciu punktach:
- końce przedziału: -4 i 3,
- miejsce zerowe pochodnej: $1/2$,
- punkty, w których podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: $-\sqrt{6}$ i $\sqrt{6}$.

$$f(-4)=6\,,$$
$$f\left(-\sqrt{6}\right)=-\sqrt{6}\,,$$
$$f(1/2)=6{,}25\,,$$
$$f\left(\sqrt{6}\right)=\sqrt{6}\,,$$
$$f(3)=6\,.$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą $-\sqrt{6}$ w punkcie $-\sqrt{6}$, a wartość największą równą $6{,}25=25/4$ w punkcie $1/2$.

Zadanie **15. (10 punktów)**

Korzystając **z definicji** pochodnej wyprowadzić wzór na pochodną funkcji f określonej wzorem $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

Uwaga: Nie wolno korzystać z reguły de l'Hospitala lub w inny sposób omijać bezpośrednie korzystanie z definicji pochodnej.

Rozwiązanie:

Stosując definicję pochodnej oraz wzór na różnicę kwadratów otrzymujemy:

$$f'(x)=\lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=\lim_{y\to x}\frac{\sqrt{y^2+1}-\sqrt{x^2+1}}{y-x}=\lim_{y\to x}\frac{y^2-x^2}{\left(\sqrt{y^2+1}+\sqrt{x^2+1}\right)\cdot(y-x)}=$$

$$=\lim_{y\to x}\frac{(y-x)\cdot(y+x)}{\left(\sqrt{y^2+1}+\sqrt{x^2+1}\right)\cdot(y-x)}=\lim_{y\to x}\frac{y+x}{\sqrt{y^2+1}+\sqrt{x^2+1}}=$$

$$=\frac{x+x}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+1}}=\frac{2\cdot x}{2\cdot\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,.$$

Zadanie **16. (10 punktów)**

Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\binom{3n+1}{n} \leqslant \frac{3^{3n-3}}{2^{2n-4}}\,.$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n=1$ mamy

$$L=\binom{4}{1}=4$$

oraz

$$P=\frac{3^0}{2^{-2}}=4\,.$$

Zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $4\leqslant 4$, jest więc prawdziwa.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$\binom{3n+1}{n} \leqslant \frac{3^{3n-3}}{2^{2n-4}}\,. \qquad (\clubsuit)$$

Wykażemy, że wówczas zachodzi nierówność

$$\binom{3n+4}{n+1} \leqslant \frac{3^{3n}}{2^{2n-2}}\,. \qquad (\diamondsuit)$$

Zauważmy najpierw, że lewą stronę nierówności ($\clubsuit$) można zapisać jako

$$\binom{3n+1}{n}=\frac{(3n+1)!}{n!\cdot(2n+1)!}\,.$$

Przekształcając lewą stronę nierówności ($\diamondsuit$) i korzystając z założenia indukcyjnego ($\clubsuit$) otrzymujemy

$$L=\binom{3n+4}{n+1}=\frac{(3n+4)!}{(n+1)!\cdot(2n+3)!}=\frac{(3n+1)!}{n!\cdot(2n+1)!}\cdot\frac{(3n+2)\cdot(3n+3)\cdot(3n+4)}{(n+1)\cdot(2n+2)\cdot(2n+3)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{3^{3n-3}}{2^{2n-4}}\cdot\frac{(3n+2)\cdot 3\cdot(3n+4)}{(2n+2)\cdot(2n+3)}\leqslant\frac{3^{3n-3}}{2^{2n-4}}\cdot\frac{27}{4}=\frac{3^{3n}}{2^{2n-2}}=P\,,$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{(3n+2)\cdot 3\cdot(3n+4)}{(2n+2)\cdot(2n+3)}\leqslant\frac{27}{4}\,. \qquad (\heartsuit)$$

Nierówność ($\heartsuit$) jest równoważna nierówności

$$\frac{\left(n+\frac{2}{3}\right)}{(n+1)}\cdot\frac{\left(n+\frac{4}{3}\right)}{\left(n+\frac{3}{2}\right)}\leqslant 1\,,$$

w której po lewej stronie występuje iloczyn dwóch ułamków mniejszych od 1 (licznik mniejszy od mianownika, oba dodatnie). Tak więc jest to nierówność prawdziwa.

Kto nie dostrzeże tego rozumowania, będzie pracowicie przekształcał nierówność ($\heartsuit$) do postaci równoważnych:

$$\frac{(3n+2)\cdot(3n+4)}{(n+1)\cdot(2n+3)} \leqslant \frac{9}{2},$$

$$2\cdot(3n+2)\cdot(3n+4) \leqslant 9\cdot(n+1)\cdot(2n+3),$$

$$18n^2+36n+16 \leqslant 18n^2+45n+27,$$

$$0 \leqslant 11n+9$$

i w tym momencie wywnioskuje, że nierówność ($\heartsuit$) jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n.

Tym samym udowodniliśmy, że dla każdej liczby naturalnej n z nierówności ($\clubsuit$) wynika nierówność ($\diamondsuit$).

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej n.

Zadanie **21. (10 punktów)**

Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A, że funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x-1+\ln(1-x)}{x^3} & \text{dla } x\neq 0 \\ A & \text{dla } x=0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A.

Rozwiązanie:

Korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{e^h-1+\ln(1-h)}{h^3}-A}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1+\ln(1-h)-Ah^3}{h^4}\,.$$

Przy $h\to 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{e^h-\frac{1}{1-h}-3Ah^2}{4h^3}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz drugi zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{e^h-\frac{1}{(1-h)^2}-6Ah}{12h^2}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz trzeci zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{e^h-\frac{2}{(1-h)^3}-6A}{24h}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{-1-6A}{0}$, co ma postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ dla $A=-1/6$. Wówczas możemy po raz czwarty zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{e^h-\frac{6}{(1-h)^3}}{24}=-\frac{5}{24}\,.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna dla $A=-1/6$ i wówczas $f'(0)=-5/24$.

Zadanie **22.** **(10 punktów)**
Wyznaczyć punkty, w których funkcja f zdefiniowana wzorem

$$f(x)=\frac{x}{99}-\frac{10\cdot\ln\left(x^2+1\right)}{99}+\operatorname{arctg} x$$

osiąga najmniejszą i największą wartość na przedziale $[9,11]$.

Rozwiązanie:
Różniczkujemy funkcję f i korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy:

$$f'(x)=\frac{1}{99}-\frac{10\cdot 2x}{99\cdot\left(x^2+1\right)}+\frac{1}{x^2+1}=\frac{x^2+1}{99\cdot\left(x^2+1\right)}-\frac{20x}{99\cdot\left(x^2+1\right)}+\frac{99}{99\cdot\left(x^2+1\right)}=$$
$$=\frac{x^2-20x+100}{99\cdot\left(x^2+1\right)}=\frac{(x-10)^2}{99\cdot\left(x^2+1\right)}\geqslant 0\,,$$

przy czym w ostatniej nierówności równość zachodzi tylko dla $x=10$. Ponieważ w interesującym nas przedziale pochodna funckji f jest dodatnia za wyjątkiem jednego punktu, w którym ma wartość zero, funkcja f jest w tym przedziale rosnąca.

Odpowiedź: Funkcja f osiąga wartość najmniejszą na początku przedziału, czyli w punkcie 9, a największą na końcu, czyli w punkcie 11.

Uwaga: Na ogół w tego typu zadaniu nie badalibyśmy znaku pochodnej, a jedynie porównalibyśmy wartości funkcji na końcach przedziału i w miejscach zerowania się pochodnej. Jednak w tym wypadku jest to praktycznie niewykonalne bez użycia kalkulatora, mamy bowiem:

$$f(9)=\frac{1}{11}-\frac{10\cdot\ln 82}{99}+\operatorname{arctg} 9\approx\mathbf{1{,}10592}5\,,$$
$$f(10)=\frac{10}{99}-\frac{10\cdot\ln 101}{99}+\operatorname{arctg} 10\approx\mathbf{1{,}10596}4\,,$$
$$f(11)=\frac{1}{9}-\frac{10\cdot\ln 122}{99}+\operatorname{arctg} 11\approx\mathbf{1{,}10599}3\,.$$

Zadanie **23. (10 punktów)**

Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **wymiernych dodatnich**, że zachodzi równość

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^3 .$$

Dla podanego przykładu obliczyć wartości sum $S_1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ oraz $S_3 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^3$.

Rozwiązanie:

Sposób I:

Spróbujemy znaleźć szereg geometryczny o żądanych własnościach.

W tym celu załóżmy, że $a_n = cq^{n-1}$, pamiętając, aby $c>0$ oraz $0<q<1$ były liczbami wymiernymi. Wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} cq^{n-1} = \frac{c}{1-q}$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3 = \sum_{n=1}^{\infty} c^3 \left(q^3\right)^{n-1} = \frac{c^3}{1-q^3} ,$$

co sprowadza równość podaną w treści zadania do postaci

$$\frac{c}{1-q} = \frac{c^3}{1-q^3} . \qquad (\spadesuit)$$

Ponieważ

$$\frac{c^3}{1-q^3} = \frac{c}{1-q} \cdot \frac{c^2}{1+q+q^2} ,$$

równanie ($\spadesuit$) można zapisać jako

$$\frac{c^2}{1+q+q^2} = 1 ,$$

czyli

$$c^2 = 1+q+q^2 .$$

Konstrukcja przykładu będzie zakończona, jeśli znajdziemy taką liczbę wymierną dodatnią $q<1$, że liczba $1+q+q^2$ jest kwadratem liczby wymiernej.

Przyjmując $q=m/n$, gdzie $m<n$ są liczbami naturalnymi, otrzymujemy

$$c = \frac{\sqrt{m^2+mn+n^2}}{n} .$$

Z równości $3^2+3\cdot 5+5^2=7^2$ (trójkąt o bokach 3, 5, 7 ma kąt 120°) wnioskujemy, że zdefiniowana wyżej liczba c jest wymierna dla $m=3$, $n=5$. Wówczas $q=3/5$ oraz $c=7/5$, a przy tym

$$S_1 = \frac{7/5}{1-3/5} = \frac{7/5}{2/5} = \frac{7}{2}$$

oraz

$$S_3 = \frac{343/125}{1-27/125} = \frac{343/125}{(125-27)/125} = \frac{343}{98} = \frac{7}{2} .$$

Odpowiedź: Przykładem szeregu spełniającego warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7\cdot 3^{n-1}}{5^n}\,,$$

a wartości sum wymienionych w treści zadania są równe $S_1=S_3=7/2$.

Sposób II:

Skonstruujemy żądany w zadaniu szereg modyfikując dowolny szereg o wyrazach wymiernych dodatnich i znanej sumie oraz znanej sumie sześcianów wyrazów.

Za punkt wyjścia weźmy możliwie najprostszy szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, dla którego potrafimy wyliczyć podane w treści zadania sumy. Niech $b_n=\frac{1}{2^n}$. Wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1 \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^3=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8^n}=\frac{1}{7}\,.$$

Przeskalujmy szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, aby rozważane sumy stały się całkowite (wtedy łatwiej będzie nad nimi zapanować). Przyjmijmy $c_n=7b_n=\frac{7}{2^n}$. Otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{2^n}=7 \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} c_n^3=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^3}{8^n}=49\,.$$

Dołóżmy na początku szeregu k wyrazów równych $1/2$, czyli przyjmijmy

$$a_n=\begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{dla} \quad n\leqslant k \\ \dfrac{7}{2^{n-k}} & \text{dla} \quad n>k \end{cases}$$

Wówczas

$$S_1=\sum_{n=1}^{\infty} a_n=7+\frac{k}{2}$$

oraz

$$S_3=\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3=49+\frac{k}{8}\,,$$

skąd wynika, że liczba k powinna spełniać równanie

$$7+\frac{k}{2}=49+\frac{k}{8}\,.$$

To prowadzi do $k=112$.

Odpowiedź: Przykładem szeregu spełniającego warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{112}\frac{1}{2}+\sum_{n=113}^{\infty}\frac{7}{2^{n-112}}\,,$$

a wartości sum wymienionych w treści zadania są równe $S_1=S_3=63$.

Zadanie **24. (10 punktów)**

Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{\sqrt{n^6+1}}+\frac{n^2+1}{\sqrt{(n^2+1)^3+1}}+\frac{n^2+2}{\sqrt{(n^2+2)^3+1}}+\frac{n^2+3}{\sqrt{(n^2+3)^3+1}}+\frac{n^2+4}{\sqrt{(n^2+4)^3+1}}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{n^2+k}{\sqrt{(n^2+k)^3+1}}+\ldots+\frac{(n+3)^2}{\sqrt{(n+3)^6+1}}\right).$$

Rozwiązanie:

Zauważamy, że dana w zadaniu suma ma $(n+3)^3-n^2+1=6n+10$ wyrazów. Szacujemy ją obustronnie:

$$(6n+10)\cdot\frac{n^2}{\sqrt{(n+3)^6+1}}\leqslant\sum_{k=0}^{6n+9}\frac{n^2+k}{\sqrt{(n^2+k)^3+1}}\leqslant(6n+10)\cdot\frac{(n+3)^2}{\sqrt{n^6+1}},$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego przy $n\to+\infty$.

Otrzymujemy

$$(6n+10)\cdot\frac{n^2}{\sqrt{(n+3)^6+1}}=\left(6+\frac{10}{n}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{3}{n}\right)^6+\frac{1}{n^6}}}\to 6$$

oraz

$$(6n+10)\cdot\frac{(n+3)^2}{\sqrt{n^6+1}}=\left(6+\frac{10}{n}\right)\cdot\frac{\left(1+\frac{3}{n}\right)^2}{\sqrt{1+\frac{1}{n^6}}}\to 6.$$

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 6.

Zadanie **25. (10 punktów)**
W każdym z zadań **25.1-25.10** podaj granicę funkcji.

Za każdą poprawną odpowiedź otrzymasz **1 punkt.**

25.1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\mathbf{1/2}$

25.2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)=\mathbf{1}$

25.3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}-x\right)=\mathbf{1/3}$

25.4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+2x^2}-x\right)=\mathbf{2/3}$

25.5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\mathbf{1}$

25.6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{x}=\mathbf{2}$

25.7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}(1+x)-\frac{\pi}{4}}{x}=\mathbf{1/2}$

25.8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}(1+2x)-\frac{\pi}{4}}{x}=\mathbf{1}$

25.9. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^7+x^6)}{\ln x}=\mathbf{7}$

25.10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^7+2x^6)}{\ln x}=\mathbf{7}$

Zadanie **26. (10 punktów)**
Niech $\mathbb{T}$ będzie zbiorem wszystkich ciągów (a_n) spełniających warunek

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} |a_n-1|<\frac{1}{n}.$$

W każdym z zadań **26.1-26.10** podaj odpowiedni kres zbioru. Za każdy poprawnie podany kres otrzymasz **1 punkt.**

26.1. $\sup\{a_1 : (a_n)\in\mathbb{T}\}=\mathbf{2}$

26.2. $\inf\{a_1 : (a_n)\in\mathbb{T}\}=\mathbf{0}$

26.3. $\sup\{a_2 : (a_n)\in\mathbb{T}\}=\mathbf{3/2}$

26.4. $\inf\{a_2 : (a_n)\in\mathbb{T}\}=\mathbf{1/2}$

26.5. $\sup\{a_2-a_3 : (a_n)\in\mathbb{T}\}=\mathbf{5/6}$

26.6. $\inf\{a_2-a_3 : (a_n)\in\mathbb{T}\}=\mathbf{-5/6}$

26.7. $\sup\{a_3-a_6 : (a_n)\in\mathbb{T}\}=\mathbf{1/2}$

26.8. $\inf\{a_3-a_6 : (a_n)\in\mathbb{T}\}=\mathbf{-1/2}$

26.9. $\sup\{a_2+a_3+a_6 : (a_n)\in\mathbb{T}\}=\mathbf{4}$

26.10. $\inf\{a_2+a_3+a_6 : (a_n)\in\mathbb{T}\}=\mathbf{2}$

Zadanie **31. (10 punktów)**
Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\binom{2n}{n}\cdot\sqrt{15n+4}<9\cdot 4^{n-1}\,.$$

Rozwiązanie:
Zamierzamy przeprowadzić dowód indukcyjny.

1° (w tej chwili wydaje nam się, że jest to pierwszy krok indukcyjny) Dla $n=1$ mamy

$$L=\binom{2n}{n}\cdot\sqrt{15n+4}=2\cdot\sqrt{19}$$

oraz

$$P=9\cdot 4^{n-1}=9\cdot 4^0=9\,,$$

a zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $2\cdot\sqrt{19}<9$, czyli $\sqrt{76}<\sqrt{81}$, jest więc prawdziwa.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$\binom{2n}{n}\cdot\sqrt{15n+4}<9\cdot 4^{n-1}\,.$$

Chcemy wykazać, że

$$\binom{2n+2}{n+1}\cdot\sqrt{15n+19}<9\cdot 4^{n}\,.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności otrzymujemy

$$\sqrt{15n+19}\cdot\binom{2n+2}{n+1}=\frac{\sqrt{15n+19}(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}=\frac{\sqrt{15n+19}(2n)!(2n+1)(2n+2)}{n!(n+1)n!(n+1)}=$$

$$=\sqrt{15n+4}\cdot\binom{2n}{n}\cdot\frac{\sqrt{15n+19}(2n+1)(2n+2)}{\sqrt{15n+4}(n+1)^2}=\sqrt{15n+4}\cdot\binom{2n}{n}\cdot\frac{2\sqrt{15n+19}(2n+1)}{\sqrt{15n+4}(n+1)}<$$

$$<9\cdot 4^{n-1}\cdot\frac{2\sqrt{15n+19}(2n+1)}{\sqrt{15n+4}(n+1)}\leqslant 9\cdot 4^{n-1}\cdot 4=9\cdot 4^{n}\,,$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{2\sqrt{15n+19}(2n+1)}{\sqrt{15n+4}(n+1)}\leqslant 4\,.$$

Powyższa nierówność jest równoważna kolejnym nierównościom

$$2\sqrt{15n+19}(2n+1)\leqslant 4\sqrt{15n+4}(n+1)\,,$$

$$\sqrt{15n+19}(2n+1)\leqslant 2\sqrt{15n+4}(n+1)\,,$$

$$(15n+19)\cdot(2n+1)^2\leqslant 4\cdot(15n+4)\cdot(n+1)^2\,,$$

$$60n^3+136n^2+91n+19\leqslant 60n^3+136n^2+92n+16\,,$$

$$3\leqslant n\,.$$

Drugi krok indukcyjny został więc przeprowadzony tylko dla $n\geqslant 3$.

Dla kompletności dowodu należy sprawdzić daną w treści zadania nierówność dla $n=2$ i $n=3$. Sprawdzenie dla $n=3$ okazuje się przejmować rolę pierwszego kroku indukcyjnego, a sprawdzenie dla $n=2$ weryfikuje dowodzoną nierówność w przypadku, który dotąd nie został sprawdzony, ani też nie wynika z dowodu indukcyjnego.

Dla $n=2$ otrzymujemy

$$L=\binom{4}{2}\cdot\sqrt{34}=6\cdot\sqrt{34}<6\cdot\sqrt{36}=36 \quad \text{oraz} \quad P=9\cdot 4^1=36\,,$$

skąd $L<P$.

1° (to okazuje się być pierwszym krokiem indukcyjnym) Dla $n=3$ otrzymujemy

$$L=\binom{6}{3}\cdot\sqrt{49}=20\cdot 7=140 \quad \text{oraz} \quad P=9\cdot 4^2=144\,,$$

skąd $L<P$.

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej $n\geqslant 3$, a ponadto wykonaliśmy bezpośrednie sprawdzenie dla $n=1$ i $n=2$.

Zadanie **32. (10 punktów)**
Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru
$$Z=\left\{\frac{mn}{4m^2+9n^2} : m,n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Rozwiązanie:
Rozwiązanie zadania oprzemy na następujących spostrzeżeniach:

1° Wszystkie elementy zbioru Z są dodatnie.

2° Istnieje ciąg o wyrazach ze zbioru Z zbieżny do zera.
Dla dowodu tego spostrzeżenia wystarczy przyjąć $m=1$ w wyrażeniu
$$\frac{mn}{4m^2+9n^2}. \qquad (\heartsuit)$$
Otrzymamy wówczas
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{4+9n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4\cdot n^{-1}+9n}=0.$$

3° Liczba $1/12$ jest elementem zbioru Z.
Aby to zobaczyć, wystaczy podstawić $m=3$ i $n=2$ w ($\heartsuit$).

4° Każdy element zbioru Z jest niewiększy od $1/12$.
Istotnie, z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną liczb $4m^2$ i $9n^2$ otrzymujemy
$$\sqrt{4m^2\cdot 9n^2}\leqslant\frac{4m^2+9n^2}{2},$$
co łatwo przekształcamy do postaci
$$\frac{mn}{4m^2+9n^2}\leqslant\frac{1}{12}.$$

Na podstawie spostrzeżeń **1**° i **2**° stwierdzamy, że $\inf Z=0$, a ze spostrzeżeń **3**° i **4**° wynika $\sup Z=1/12$

Odpowiedź: Kres dolny danego zbioru jest równy 0, a kres górny 1/12.

Zadanie **33. (10 punktów)**
Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+5n}\,.$$

Rozwiązanie:
Szukamy takich liczb A i B, że

$$\frac{1}{n^2+5n}=\frac{1}{n\cdot(n+5)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+5}\,.$$

Po wymnożeniu prawej równości stronami przez $n\cdot(n+5)$ otrzymujemy

$$1=A(n+5)+Bn\,.$$

Dla $n=0$ otrzymujemy $A=1/5$, natomiast przyjęcie $n=-5$ daje $B=-1/5$.

Zatem N-ta suma częściowa danego szeregu wyraża się wzorem

$$S_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2+5n}=\frac{1}{5}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+5}\right)=$$

$$=\frac{1}{5}\left(\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{12}\right)+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\left(\frac{1}{N-3}-\frac{1}{N+2}\right)+\left(\frac{1}{N-2}-\frac{1}{N+3}\right)+\left(\frac{1}{N-1}-\frac{1}{N+4}\right)+\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{N+5}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{N+1}-\frac{1}{N+2}-\frac{1}{N+3}-\frac{1}{N+4}-\frac{1}{N+5}\right),$$

co przy N dążącym do $+\infty$ zbiega do

$$\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{5}\cdot\frac{60+30+20+15+12}{60}=\frac{137}{300}\,.$$

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg ma sumę równą 137/300.

Zadanie **34. (10 punktów)**
Udowodnić nierówności

$$\frac{1}{1301} < \operatorname{arctg} 51 - \operatorname{arctg} 49 < \frac{1}{1201}\,.$$

Rozwiązanie:
Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej rachunku różniczkowego zastosowanego do funkcji $f(x) = \operatorname{arctg} x$ na przedziale $[49, 51]$ wynika istnienie takiej liczby $c \in (49, 51)$, że

$$\operatorname{arctg} 51 - \operatorname{arctg} 49 = (51-49) \cdot f'(c) = 2 \cdot f'(c)\,.$$

Ponieważ

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1}\,,$$

z nierówności $49 < c < 51$ otrzymujemy

$$\frac{1}{1301} = \frac{2}{2602} = \frac{2}{51^2+1} \quad < \quad \operatorname{arctg} 51 - \operatorname{arctg} 49 = \frac{2}{c^2+1} \quad < \quad \frac{2}{49^2+1} = \frac{2}{2402} = \frac{1}{1201}\,,$$

co kończy dowód nierówności podanych w treści zadania.

Zadanie **35.** **(10 punktów)**
Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej $n>2$ zachodzi nierówność

$$(n-2)\cdot n^{4n-1}<(n-1)^{2n}\cdot(n+1)^{2n}\,.$$

Rozwiązanie:
Przepisujemy daną nierówność w postaci

$$\left(n^2-2n\right)\cdot\left(n^2\right)^{2n-1}<\left(n^2-1\right)^{2n}$$

i zauważamy, że w otrzymanej nierówności po każdej ze stron znajduje się iloczyn $2n$ czynników nieujemnych o takiej samej sumie równej $2n^3-2n$.

Zgodnie z przeformułowaniem nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną, iloczyn ustalonej liczby czynników nieujemnych o ustalonej sumie jest największy, gdy wszystkie jego czynniki są równe. Stąd wynika prawdziwość dowodzonej nierówności.

Zadanie **36.** **(10 punktów)**

W każdym z zadań **36.1-36.10** dla podanej liczby a podaj taką liczbę b, że funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=a|x|+bx$$

spełnia dla każdej liczby rzeczywistej x równość $f(f(x))=x$, czyli jest odwrotna do samej siebie.

Za każdą poprawną odpowiedź otrzymasz **1 punkt.**

36.1. $a=1$, $b=\mathbf{-\sqrt{2}}$

36.2. $a=-1$, $b=\mathbf{-\sqrt{2}}$

36.3. $a=2$, $b=\mathbf{-\sqrt{5}}$

36.4. $a=-2$, $b=\mathbf{-\sqrt{5}}$

36.5. $a=3$, $b=\mathbf{-\sqrt{10}}$

36.6. $a=-3$, $b=\mathbf{-\sqrt{10}}$

36.7. $a=3/4$, $b=\mathbf{-5/4}$

36.8. $a=-3/4$, $b=\mathbf{-5/4}$

36.9. $a=4/3$, $b=\mathbf{-5/3}$

36.10. $a=-4/3$, $b=\mathbf{-5/3}$