Egzamin, 2.02.2016, godz. 9:00-13:20

Zadanie **11. (10 punktów)**

W każdym z zadań **11.1-11.10** podaj (w postaci uproszczonej) kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** albo **NIE**).
Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty=\infty$.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz **1 punkt**.
Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz przynależność jednego z nich do zbioru, otrzymasz **0,5 punktu**.
Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.

$\mathbb{N}=\{1,2,3,4,5,\ldots\}$ oznacza zbiór liczb naturalnych (całkowitych dodatnich).

11.1. $A=\left\{(x-2)^2 : x\in(0,3)\right\}$ Ocena ....

$\inf A=$ .... $\sup A=$ ....

Czy kres dolny należy do zbioru A .... Czy kres górny należy do zbioru A ....

11.2. $B=\left\{(x-2)^3 : x\in(0,3)\right\}$ Ocena ....

$\inf B=$ .... $\sup B=$ ....

Czy kres dolny należy do zbioru B .... Czy kres górny należy do zbioru B ....

11.3. $C=\left\{(x-2)^4 : x\in(0,3)\right\}$ Ocena ....

$\inf C=$ .... $\sup C=$ ....

Czy kres dolny należy do zbioru C .... Czy kres górny należy do zbioru C ....

11.4. $D=\left\{(x-2)^5 : x\in(0,3)\right\}$ Ocena ....

$\inf D=$ .... $\sup D=$ ....

Czy kres dolny należy do zbioru D .... Czy kres górny należy do zbioru D ....

11.5. $E=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N} \wedge 4n^2\leqslant 8m^2\leqslant 16n^2\right\}$ Ocena ....

$\inf E=$ .... $\sup E=$ ....

Czy kres dolny należy do zbioru E .... Czy kres górny należy do zbioru E ....

11.6. $F=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N} \wedge 4n^2\leqslant 9m^2\leqslant 16n^2\right\}$ Ocena ....

$\inf F=$ .... $\sup F=$ ....

Czy kres dolny należy do zbioru F .... Czy kres górny należy do zbioru F ....

11.7. $G=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N} \wedge 25n^2\leqslant 9m^2\leqslant 27n^2\right\}$ Ocena ....

$\inf G=$ .... $\sup G=$ ....

Czy kres dolny należy do zbioru G .... Czy kres górny należy do zbioru G ....

11.8. $H=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N} \wedge 4^n\leqslant 8^m\leqslant 16^n\right\}$ Ocena ....

$\inf H=$ .... $\sup H=$ ....

Czy kres dolny należy do zbioru H .... Czy kres górny należy do zbioru H ....

11.9. $I=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N} \wedge 4^n\leqslant 9^m\leqslant 16^n\right\}$ Ocena ....

$\inf I=$ .... $\sup I=$ ....

Czy kres dolny należy do zbioru I .... Czy kres górny należy do zbioru I ....

11.10. $J=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N} \wedge 25^n\leqslant 9^m\leqslant 27^n\right\}$ Ocena ....

$\inf J=$ .... $\sup J=$ ....

Czy kres dolny należy do zbioru J .... Czy kres górny należy do zbioru J ....

Zadanie **12. (10 punktów)**

W każdym z zadań **12.1-12.10** podaj dziedzinę funkcji f określonej podanym wzorem. Za każdą poprawnie podaną dziedzinę otrzymasz **1 punkt.**

12.1. $f(x)=\sqrt{(x-64)\cdot(x^2-64)}$ $D_f=$ ....

12.2. $f(x)=\sqrt{(x^2-64)\cdot(x^3-64)}$ $D_f=$ ....

12.3. $f(x)=\sqrt{(x^3-64)\cdot(x^6-64)}$ $D_f=$ ....

12.4. $f(x)=\sqrt{(x^6-64)\cdot(2^x-64)}$ $D_f=$ ....

12.5. $f(x)=\sqrt{(2^x-64)\cdot(x-64)}$ $D_f=$ ....

12.6. $f(x)=\sqrt{(x-64)^2\cdot(x^3-64)}$ $D_f=$ ....

12.7. $f(x)=\sqrt{(x^2-64)^2\cdot(x^6-64)}$ $D_f=$ ....

12.8. $f(x)=\sqrt{(x^3-64)^2\cdot(2^x-64)}$ $D_f=$ ....

12.9. $f(x)=\sqrt{(x^6-64)^2\cdot(x-64)}$ $D_f=$ ....

12.10. $f(x)=\sqrt{(2^x-64)^2\cdot(x^2-64)}$ $D_f=$ ....

Zadanie **13. (10 punktów)**

Dowieść, że liczba $\log_{20}4000$ jest niewymierna.

Zadanie **14. (10 punktów)**

Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=x+\left|x^2-6\right|$$

na przedziale $[-4,3]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Zadanie **15. (10 punktów)**

Korzystając **z definicji** pochodnej wyprowadzić wzór na pochodną funkcji f określonej wzorem $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

Uwaga: Nie wolno korzystać z reguły de l'Hospitala lub w inny sposób omijać bezpośrednie korzystanie z definicji pochodnej.

Zadanie **16. (10 punktów)**

Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\binom{3n+1}{n} \leqslant \frac{3^{3n-3}}{2^{2n-4}}\,.$$

Zadanie **21. (10 punktów)**

Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A, że funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x-1+\ln(1-x)}{x^3} & \text{dla} \quad x\neq 0 \\ A & \text{dla} \quad x=0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A.

Zadanie **22. (10 punktów)**

Wyznaczyć punkty, w których funkcja f zdefiniowana wzorem

$$f(x)=\frac{x}{99}-\frac{10\cdot\ln\left(x^2+1\right)}{99}+\operatorname{arctg} x$$

osiąga najmniejszą i największą wartość na przedziale $[9,11]$.

Zadanie **23. (10 punktów)**

Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **wymiernych dodatnich**, że zachodzi równość

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3\,.$$

Dla podanego przykładu obliczyć wartości sum $S_1=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ oraz $S_3=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^3$.

Zadanie **24. (10 punktów)**

Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{\sqrt{n^6+1}}+\frac{n^2+1}{\sqrt{(n^2+1)^3+1}}+\frac{n^2+2}{\sqrt{(n^2+2)^3+1}}+\frac{n^2+3}{\sqrt{(n^2+3)^3+1}}+\frac{n^2+4}{\sqrt{(n^2+4)^3+1}}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{n^2+k}{\sqrt{(n^2+k)^3+1}}+\ldots+\frac{(n+3)^2}{\sqrt{(n+3)^6+1}}\right).$$

Zadanie **25. (10 punktów)**
W każdym z zadań **25.1-25.10** podaj granicę funkcji.

Za każdą poprawną odpowiedź otrzymasz **1 punkt.**

25.1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=$ ....

25.2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)=$ ....

25.3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}-x\right)=$ ....

25.4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+2x^2}-x\right)=$ ....

25.5. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=$ ....

25.6. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{x}=$ ....

25.7. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{arctg}(1+x)-\frac{\pi}{4}}{x}=$ ....

25.8. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{arctg}(1+2x)-\frac{\pi}{4}}{x}=$ ....

25.9. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^7+x^6)}{\ln x}=$ ....

25.10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^7+2x^6)}{\ln x}=$ ....

Zadanie **26. (10 punktów)**
Niech $\mathbb{T}$ będzie zbiorem wszystkich ciągów (a_n) spełniających warunek

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} |a_n-1|<\frac{1}{n}.$$

W każdym z zadań **26.1-26.10** podaj odpowiedni kres zbioru. Za każdy poprawnie podany kres otrzymasz **1 punkt.**

26.1. $\sup\{a_1:(a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

26.2. $\inf\{a_1:(a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

26.3. $\sup\{a_2:(a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

26.4. $\inf\{a_2:(a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

26.5. $\sup\{a_2-a_3:(a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

26.6. $\inf\{a_2-a_3:(a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

26.7. $\sup\{a_3-a_6:(a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

26.8. $\inf\{a_3-a_6:(a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

26.9. $\sup\{a_2+a_3+a_6:(a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

26.10. $\inf\{a_2+a_3+a_6:(a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

Zadanie **31. (10 punktów)**
Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\binom{2n}{n}\cdot\sqrt{15n+4}<9\cdot 4^{n-1}.$$

Zadanie **32. (10 punktów)**
Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$Z=\left\{\frac{mn}{4m^2+9n^2}: m,n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Zadanie **33. (10 punktów)**
Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+5n}.$$

Zadanie **34. (10 punktów)**
Udowodnić nierówności

$$\frac{1}{1301}<\operatorname{arctg} 51-\operatorname{arctg} 49<\frac{1}{1201}.$$

Zadanie **35. (10 punktów)**
Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej $n>2$ zachodzi nierówność

$$(n-2)\cdot n^{4n-1}<(n-1)^{2n}\cdot(n+1)^{2n}.$$

Zadanie **36. (10 punktów)**

W każdym z zadań **36.1-36.10** dla podanej liczby a podaj taką liczbę b, że funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=a|x|+bx$$

spełnia dla każdej liczby rzeczywistej x równość $f(f(x))=x$, czyli jest odwrotna do samej siebie.

Za każdą poprawną odpowiedź otrzymasz **1 punkt.**

36.1. $a=1$, $b=$ ....

36.2. $a=-1$, $b=$ ....

36.3. $a=2$, $b=$ ....

36.4. $a=-2$, $b=$ ....

36.5. $a=3$, $b=$ ....

36.6. $a=-3$, $b=$ ....

36.7. $a=3/4$, $b=$ ....

36.8. $a=-3/4$, $b=$ ....

36.9. $a=4/3$, $b=$ ....

36.10. $a=-4/3$, $b=$ ....