

Egzamin, **15.02.2016**, godz. 9:00-13:20Zadanie **11.** (10 punktów)

W każdym z zadań **11.1-11.10** podaj (w postaci uproszczonej) kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** albo **NIE**).

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy  $-\infty$  albo  $+\infty = \infty$ .

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz **1 punkt**.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz przynależność jednego z nich do zbioru, otrzymasz **0,5 punktu**.

Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$  oznacza zbiór liczb naturalnych (całkowitych dodatnich).

**11.1.**  $A = \left\{ \frac{1}{3^n - 10} : n \in \mathbb{N} \right\}$

Ocena .....

$\inf A = -1$

$\sup A = 1/17$

Czy kres dolny należy do zbioru  $A$  **TAK**    Czy kres górny należy do zbioru  $A$  **TAK**

**11.2.**  $B = \left\{ \frac{1}{3^n - 20} : n \in \mathbb{N} \right\}$

Ocena .....

$\inf B = -1/11$

$\sup B = 1/7$

Czy kres dolny należy do zbioru  $B$  **TAK**    Czy kres górny należy do zbioru  $B$  **TAK**

**11.3.**  $C = \left\{ \frac{1}{3^n - 26} : n \in \mathbb{N} \right\}$

Ocena .....

$\inf C = -1/17$

$\sup C = 1$

Czy kres dolny należy do zbioru  $C$  **TAK**    Czy kres górny należy do zbioru  $C$  **TAK**

**11.4.**  $D = \left\{ \frac{1}{5^n - 26} : n \in \mathbb{N} \right\}$

Ocena .....

$\inf D = -1$

$\sup D = 1/99$

Czy kres dolny należy do zbioru  $D$  **TAK**    Czy kres górny należy do zbioru  $D$  **TAK**

---

**11.5.**  $E = \left\{ \left( \sqrt{26} - 4 \right)^n : n \in \mathbb{N} \right\}$

Ocena .....

$\inf E = \sqrt{26} - 4$

$\sup E = +\infty$

Czy kres dolny należy do zbioru  $E$  **TAK**    Czy kres górny należy do zbioru  $E$  **NIE**

---

**11.6.**  $F = \left\{ \left( \sqrt{26} - 5 \right)^n : n \in \mathbb{N} \right\}$

Ocena .....

$\inf F = 0$

$\sup F = \sqrt{26} - 5$

Czy kres dolny należy do zbioru  $F$  **NIE**    Czy kres górny należy do zbioru  $F$  **TAK**

---

**11.7.**  $G = \left\{ \left( \sqrt{26} - 6 \right)^n : n \in \mathbb{N} \right\}$

Ocena .....

$\inf G = \sqrt{26} - 6$

$\sup G = \left( \sqrt{26} - 6 \right)^2$

Czy kres dolny należy do zbioru  $G$  **TAK**    Czy kres górny należy do zbioru  $G$  **TAK**

---

**11.8.**  $H = \left\{ 2^{x^2} : x \in (-2, 1) \right\}$

Ocena .....

$\inf H = 1$

$\sup H = 16$

Czy kres dolny należy do zbioru  $H$  **TAK**    Czy kres górny należy do zbioru  $H$  **NIE**

---

**11.9.**  $I = \left\{ 2^{x^3} : x \in (-2, 1) \right\}$

Ocena .....

$\inf I = 1/256$

$\sup I = 2$

Czy kres dolny należy do zbioru  $I$  **NIE**    Czy kres górny należy do zbioru  $I$  **NIE**

---

**11.10.**  $J = \left\{ 2^{x^4} : x \in (-2, 1) \right\}$

Ocena .....

$\inf J = 1$

$\sup J = 2^{16}$

Czy kres dolny należy do zbioru  $J$  **TAK**    Czy kres górny należy do zbioru  $J$  **NIE**

**Zadanie 12. (10 punktów)**

W każdym z zadań **12.1-12.10** podaj granicę funkcji.

Za każdą poprawną odpowiedź otrzymasz **1 punkt**.

**12.1.**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0$

**12.2.**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{2^x} = 1$

**12.3.**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{2^{2^x}} = 2$

**12.4.**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{2^{2^{2^x}}} = 4$

**12.5.**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{2^{2^{2^{2^x}}}} = 16$

**12.6.**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{3^{4^x}} = 2$

**12.7.**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 4^{3^{2^x}} = 4$

**12.8.**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{3^{4^{5^x}}} = 8$

**12.9.**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3^{4^{5^{6^x}}} = 81$

**12.10.**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3^{2^{2^{4^{5^x}}}} = 81$

**Zadanie 25. (10 punktów)**

W każdym z zadań **25.1-25.10** podaj (w postaci uproszczonej) kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** albo **NIE**).

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy  $-\infty$  albo  $+\infty = \infty$ .

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz **1 punkt**.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz przynależność jednego z nich do zbioru, otrzymasz **0,5 punktu**.

Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$  oznacza zbiór liczb naturalnych (całkowitych dodatnich).

---

**25.1.**  $A = \{x - \ln x : x \in (2, 3)\}$

Ocena .....

$\inf A = 2 - \ln 2$

$\sup A = 3 - \ln 3$

Czy kres dolny należy do zbioru  $A$  **NIE**    Czy kres górny należy do zbioru  $A$  **NIE**

---

**25.2.**  $B = \{x - 2 \cdot \ln x : x \in (2, 3)\}$

Ocena .....

$\inf B = 2 - 2 \cdot \ln 2$

$\sup B = 3 - 2 \cdot \ln 3$

Czy kres dolny należy do zbioru  $B$  **NIE**    Czy kres górny należy do zbioru  $B$  **NIE**

---

**25.3.**  $C = \{x - 3 \cdot \ln x : x \in (2, 3)\}$

Ocena .....

$\inf C = 3 - 3 \cdot \ln 3$

$\sup C = 2 - 3 \cdot \ln 2$

Czy kres dolny należy do zbioru  $C$  **NIE**    Czy kres górny należy do zbioru  $C$  **NIE**

---

**25.4.**  $D = \{x - 4 \cdot \ln x : x \in (2, 3)\}$

Ocena .....

$\inf D = 3 - 4 \cdot \ln 3$

$\sup D = 2 - 4 \cdot \ln 2$

Czy kres dolny należy do zbioru  $D$  **NIE**    Czy kres górny należy do zbioru  $D$  **NIE**

---

$$25.5. E = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 3^{n^2} \leq 2^{m^2} \leq 5^{n^2} \right\} \quad \text{Ocena .....}$$

$$\inf E = \sqrt{\log_2 3}$$

$$\sup E = \sqrt{\log_2 5}$$

Czy kres dolny należy do zbioru  $E$  **NIE** Czy kres górny należy do zbioru  $E$  **NIE**

$$25.6. F = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 3^{n^3} \leq 2^{m^3} \leq 5^{n^3} \right\} \quad \text{Ocena .....}$$

$$\inf F = \sqrt[3]{\log_2 3}$$

$$\sup F = \sqrt[3]{\log_2 5}$$

Czy kres dolny należy do zbioru  $F$  **NIE** Czy kres górny należy do zbioru  $F$  **NIE**

$$25.7. G = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 4^{n^2} \leq 2^{m^2} \leq 8^{n^2} \right\} \quad \text{Ocena .....}$$

$$\inf G = \sqrt{2}$$

$$\sup G = \sqrt{3}$$

Czy kres dolny należy do zbioru  $G$  **NIE** Czy kres górny należy do zbioru  $G$  **NIE**

$$25.8. H = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 9^{n^2} \leq 3^{m^2} \leq 27^{n^2} \right\} \quad \text{Ocena .....}$$

$$\inf H = \sqrt{2}$$

$$\sup H = \sqrt{3}$$

Czy kres dolny należy do zbioru  $H$  **NIE** Czy kres górny należy do zbioru  $H$  **NIE**

$$25.9. I = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 16^{n^2} \leq 2^{m^2} \leq 32^{n^2} \right\} \quad \text{Ocena .....}$$

$$\inf I = 2$$

$$\sup I = \sqrt{5}$$

Czy kres dolny należy do zbioru  $I$  **TAK** Czy kres górny należy do zbioru  $I$  **NIE**

$$25.10. J = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 27^{n^2} \leq 3^{m^2} \leq 81^{n^2} \right\} \quad \text{Ocena .....}$$

$$\inf J = \sqrt{3}$$

$$\sup J = 2$$

Czy kres dolny należy do zbioru  $J$  **NIE** Czy kres górny należy do zbioru  $J$  **TAK**

**Zadanie 26. (10 punktów)**

Niech  $\mathbb{T}$  będzie zbiorem wszystkich ciągów  $(a_n)$  spełniających warunek

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \left| a_n - \frac{1}{n} \right| < \frac{1}{n}.$$

W każdym z zadań **26.1-26.10** podaj odpowiedni kres zbioru. Za każdy poprawnie podany kres otrzymasz **1 punkt**.

**26.1.**  $\sup\{a_1 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \mathbf{2}$

**26.2.**  $\inf\{a_1 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \mathbf{0}$

**26.3.**  $\sup\{a_2 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \mathbf{1}$

**26.4.**  $\inf\{a_2 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \mathbf{0}$

**26.5.**  $\sup\{a_2 - a_3 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \mathbf{1}$

**26.6.**  $\inf\{a_2 - a_3 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \mathbf{-2/3}$

**26.7.**  $\sup\{a_3 - a_6 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \mathbf{2/3}$

**26.8.**  $\inf\{a_3 - a_6 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \mathbf{-1/3}$

**26.9.**  $\sup\{a_2 + a_3 + a_6 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \mathbf{2}$

**26.10.**  $\inf\{a_2 + a_3 + a_6 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \mathbf{0}$