

Egzamin, **15.02.2016**, godz. 9:00-13:20Zadanie **11.** (10 punktów)

W każdym z zadań **11.1-11.10** podaj (w postaci uproszczonej) kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** albo **NIE**).

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty = \infty$.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz **1 punkt**.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz przynależność jednego z nich do zbioru, otrzymasz **0,5 punktu**.

Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ oznacza zbiór liczb naturalnych (całkowitych dodatnich).

11.1. $A = \left\{ \frac{1}{3^n - 10} : n \in \mathbb{N} \right\}$ Ocena

$\inf A = \dots\dots\dots$ $\sup A = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru A Czy kres górny należy do zbioru A

11.2. $B = \left\{ \frac{1}{3^n - 20} : n \in \mathbb{N} \right\}$ Ocena

$\inf B = \dots\dots\dots$ $\sup B = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru B Czy kres górny należy do zbioru B

11.3. $C = \left\{ \frac{1}{3^n - 26} : n \in \mathbb{N} \right\}$ Ocena

$\inf C = \dots\dots\dots$ $\sup C = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru C Czy kres górny należy do zbioru C

11.4. $D = \left\{ \frac{1}{5^n - 26} : n \in \mathbb{N} \right\}$ Ocena

$\inf D = \dots\dots\dots$ $\sup D = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru D Czy kres górny należy do zbioru D

11.5. $E = \{(\sqrt{26} - 4)^n : n \in \mathbb{N}\}$ Ocena

$\inf E = \dots\dots\dots$ $\sup E = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru E Czy kres górny należy do zbioru E

11.6. $F = \{(\sqrt{26} - 5)^n : n \in \mathbb{N}\}$ Ocena

$\inf F = \dots\dots\dots$ $\sup F = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru F Czy kres górny należy do zbioru F

11.7. $G = \{(\sqrt{26} - 6)^n : n \in \mathbb{N}\}$ Ocena

$\inf G = \dots\dots\dots$ $\sup G = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru G Czy kres górny należy do zbioru G

11.8. $H = \{2^{x^2} : x \in (-2, 1)\}$ Ocena

$\inf H = \dots\dots\dots$ $\sup H = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru H Czy kres górny należy do zbioru H

11.9. $I = \{2^{x^3} : x \in (-2, 1)\}$ Ocena

$\inf I = \dots\dots\dots$ $\sup I = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru I Czy kres górny należy do zbioru I

11.10. $J = \{2^{x^4} : x \in (-2, 1)\}$ Ocena

$\inf J = \dots\dots\dots$ $\sup J = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru J Czy kres górny należy do zbioru J

Zadanie 12. (10 punktów)W każdym z zadań **12.1-12.10** podaj granicę funkcji.Za każdą poprawną odpowiedź otrzymasz **1 punkt**.

12.1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = \dots\dots\dots$

12.2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{2^x} = \dots\dots\dots$

12.3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{2^{2^x}} = \dots\dots\dots$

12.4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{2^{2^{2^x}}} = \dots\dots\dots$

12.5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{2^{2^{2^{2^x}}}} = \dots\dots\dots$

12.6. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{3^{4^x}} = \dots\dots\dots$

12.7. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 4^{3^{2^x}} = \dots\dots\dots$

12.8. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{3^{4^{5^x}}} = \dots\dots\dots$

12.9. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3^{4^{5^{6^x}}} = \dots\dots\dots$

12.10. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3^{2^{2^{4^{5^x}}}} = \dots\dots\dots$

Zadanie 13. (10 punktów)

Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\binom{3n+2}{n} \leq \frac{3^{3n+1}}{2^{2n+2}}.$$

Zadanie 14. (10 punktów)

Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = \sqrt{9x^2 + 6x + 1} - x^2$$

na przedziale $[-2, 3]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Zadanie 15. (10 punktów)

Korzystając z **definicji** pochodnej wyprowadzić wzór na pochodną funkcji f określonej wzorem $f(x) = \sqrt[4]{x^4 + 1}$.

Uwaga: Nie wolno korzystać z reguły de l'Hospitala lub w inny sposób omijać bezpośrednio korzystanie z definicji pochodnej.

Zadanie 16. (10 punktów)

Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = \sqrt[4]{x^4 + 1}.$$

Zadanie 21. (10 punktów)

Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A , że funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{e^x} - e - ex - ex^2}{x^3} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A .

Zadanie 22. (10 punktów)

Wskazując odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C oraz liczbę rzeczywistą k udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \cdot n^k \leq \frac{\sqrt[3]{64n-37}+2}{\sqrt[4]{16n+65}-1} \leq 6C \cdot n^k.$$

Zadanie 23. (10 punktów)

Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3}{\sqrt{n^k+n^3}} + \frac{n^3+9}{\sqrt{n^k+n^3+9}} + \frac{n^3+18}{\sqrt{n^k+n^3+18}} + \frac{n^3+27}{\sqrt{n^k+n^3+27}} + \frac{n^3+36}{\sqrt{n^k+n^3+36}} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{n^3+9i}{\sqrt{n^k+n^3+9i}} + \dots + \frac{(n+3)^3-18}{\sqrt{n^k+(n+3)^3-18}} + \frac{(n+3)^3-9}{\sqrt{n^k+(n+3)^3-9}} + \frac{(n+3)^3}{\sqrt{n^k+(n+3)^3}} \right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej dodatniej parametru k , aby powyższa granica była dodatnia i skończona.

Zadanie 24. (10 punktów)

Funkcja $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$f(x) = x^2 + \sqrt{x}.$$

Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą dodatnią C , że spełnione są następujące dwa warunki:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{f(a)+f(b)}{2} \quad \text{dla dowolnych } a, b \in (0, C)$$

oraz

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \quad \text{dla dowolnych } a, b \in (C, +\infty).$$

Zadanie 25. (10 punktów)

W każdym z zadań **25.1-25.10** podaj (w postaci uproszczonej) kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** albo **NIE**).

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty = \infty$.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz **1 punkt**.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz przynależność jednego z nich do zbioru, otrzymasz **0,5 punktu**.

Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ oznacza zbiór liczb naturalnych (całkowitych dodatnich).

25.1. $A = \{x - \ln x : x \in (2, 3)\}$

Ocena

$\inf A = \dots\dots\dots$ $\sup A = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru A Czy kres górny należy do zbioru A

25.2. $B = \{x - 2 \cdot \ln x : x \in (2, 3)\}$

Ocena

$\inf B = \dots\dots\dots$ $\sup B = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru B Czy kres górny należy do zbioru B

25.3. $C = \{x - 3 \cdot \ln x : x \in (2, 3)\}$

Ocena

$\inf C = \dots\dots\dots$ $\sup C = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru C Czy kres górny należy do zbioru C

25.4. $D = \{x - 4 \cdot \ln x : x \in (2, 3)\}$

Ocena

$\inf D = \dots\dots\dots$ $\sup D = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru D Czy kres górny należy do zbioru D

25.5. $E = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 3^{n^2} \leq 2^{m^2} \leq 5^{n^2} \right\}$ Ocena

$\inf E = \dots\dots\dots$ $\sup E = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru E Czy kres górny należy do zbioru E

25.6. $F = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 3^{n^3} \leq 2^{m^3} \leq 5^{n^3} \right\}$ Ocena

$\inf F = \dots\dots\dots$ $\sup F = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru F Czy kres górny należy do zbioru F

25.7. $G = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 4^{n^2} \leq 2^{m^2} \leq 8^{n^2} \right\}$ Ocena

$\inf G = \dots\dots\dots$ $\sup G = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru G Czy kres górny należy do zbioru G

25.8. $H = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 9^{n^2} \leq 3^{m^2} \leq 27^{n^2} \right\}$ Ocena

$\inf H = \dots\dots\dots$ $\sup H = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru H Czy kres górny należy do zbioru H

25.9. $I = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 16^{n^2} \leq 2^{m^2} \leq 32^{n^2} \right\}$ Ocena

$\inf I = \dots\dots\dots$ $\sup I = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru I Czy kres górny należy do zbioru I

25.10. $J = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 27^{n^2} \leq 3^{m^2} \leq 81^{n^2} \right\}$ Ocena

$\inf J = \dots\dots\dots$ $\sup J = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru J Czy kres górny należy do zbioru J

Zadanie 26. (10 punktów)

Niech \mathbb{T} będzie zbiorem wszystkich ciągów (a_n) spełniających warunek

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \left| a_n - \frac{1}{n} \right| < \frac{1}{n}.$$

W każdym z zadań **26.1-26.10** podaj odpowiedni kres zbioru. Za każdy poprawnie podany kres otrzymasz **1 punkt**.

26.1. $\sup\{a_1 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

26.2. $\inf\{a_1 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

26.3. $\sup\{a_2 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

26.4. $\inf\{a_2 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

26.5. $\sup\{a_2 - a_3 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

26.6. $\inf\{a_2 - a_3 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

26.7. $\sup\{a_3 - a_6 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

26.8. $\inf\{a_3 - a_6 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

26.9. $\sup\{a_2 + a_3 + a_6 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

26.10. $\inf\{a_2 + a_3 + a_6 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$