KOLOKWIUM nr 10, 21.12.2015, godz. 14.15-15.00

Zadanie **18. (10 punktów)**

Korzystając **z definicji** pochodnej wyprowadzić wzór na pochodną funkcji f określonej wzorem $f(x)=\sqrt[4]{x}$ na przedziale $(0,+\infty)$.

Rozwiązanie:

Stosując definicję pochodnej oraz wzór na różnicę czwartych potęg otrzymujemy:

$$f'(x)=\lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=\lim_{y\to x}\frac{\sqrt[4]{y}-\sqrt[4]{x}}{y-x}=\lim_{y\to x}\frac{y-x}{\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\cdot(y-x)}=$$

$$=\lim_{y\to x}\frac{1}{\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}=\frac{1}{(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{x})\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{x})}=\frac{1}{(2\cdot\sqrt[4]{x})\cdot(2\cdot\sqrt{x})}=\frac{1}{4\cdot\sqrt[4]{x^3}}\,.$$

Zadanie **19. (10 punktów)**

Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **wymiernych dodatnich**, że jego suma jest liczbą wymierną, a ponadto zachodzi równość

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4 .$$

Dla podanego przykładu obliczyć wartości sum $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ oraz $S_4 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4$.

Wskazówka: Poszukać szeregu geometrycznego.

Rozwiązanie:

Zgodnie ze wskazówką spróbujemy znaleźć szereg geometryczny o żądanych własnościach.

W tym celu załóżmy, że $a_n = cq^{n-1}$, pamiętając, aby $c>0$ oraz $0<q<1$ były liczbami wymiernymi. Wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} cq^{n-1} = \frac{c}{1-q}$$

jest liczbą wymierną.

Ponadto

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c^2 \left(q^2\right)^{n-1} = \frac{c^2}{1-q^2}$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^4 = \sum_{n=1}^{\infty} c^4 \left(q^4\right)^{n-1} = \frac{c^4}{1-q^4} ,$$

co sprowadza równość podaną w treści zadania do postaci

$$\frac{c^2}{1-q^2} = \frac{c^4}{1-q^4} . \qquad (\spadesuit)$$

Ponieważ

$$\frac{c^4}{1-q^4} = \frac{c^2}{1-q^2} \cdot \frac{c^2}{1+q^2} ,$$

równanie ($\spadesuit$) można zapisać jako

$$\frac{c^2}{1+q^2} = 1 ,$$

czyli

$$c^2 = 1+q^2 .$$

Konstrukcja przykładu będzie zakończona, jeśli znajdziemy taką liczbę wymierną dodatnią $q<1$, że liczba $1+q^2$ jest kwadratem liczby wymiernej.

Przyjmując $q=m/n$, gdzie $m<n$ są liczbami naturalnymi, otrzymujemy

$$c = \frac{\sqrt{m^2+n^2}}{n} .$$

Z równości $3^2+4^2=5^2$ wnioskujemy, że zdefiniowana wyżej liczba c jest wymierna dla $m=3$, $n=4$. Wówczas $q=3/4$ oraz $c=5/4$, a przy tym

$$S_1 = \frac{5/4}{1-3/4} = \frac{5/4}{1/4} = 5 ,$$

$$S_2=\frac{25/16}{1-9/16}=\frac{25/16}{7/16}=\frac{25}{7}$$

oraz

$$S_4=\frac{625/256}{1-81/256}=\frac{625/256}{(256-81)/256}=\frac{625}{256-81}=\frac{625}{175}=\frac{25}{7}\,.$$

Odpowiedź: Przykładem szeregu spełniającego warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5\cdot 3^{n-1}}{4^n}\,,$$

a wartości sum wymienionych w treści zadania są równe $S_1=5$ oraz $S_2=S_4=25/7$.

Uwaga: Jeżeli ufamy w bezbłędność przeprowadzonych przez nas przekształceń, bezpośrednie wyliczanie S_4 nie jest konieczne, gdyż zaprezentowana metoda rozwiązania gwarantuje równość $S_2=S_4$. Jeśli jednak w rachunkach pojawił się błąd, a my nie przeprowadziliśmy uczciwie sugerowanych w treści zadania obliczeń sprawdzających równość $S_2=S_4$, możemy ściągnąć na siebie większy gniew osoby oceniającej rozwiązanie, niżbyśmy na to zasługiwali tylko z powodu drobnego błędu rachunkowego.

Uwaga 2: Przez S_N zwykle oznaczamy N-tą sumę częściową szeregu, podczas gdy sumy S_1, S_2, S_4 w treści zadania są czymś zupełnie innym. Zadanie sprawdza więc przy okazji (bo nie to jest jego głównym celem) rozumienie, że te same oznaczenia mogą w różnym kontekście znaczyć coś zupełnie innego. Student, który nie miałby tej świadomości, byłby narażony na bezkrytyczne przyswojenie następującego wzoru Pitagorasa-Einsteina:

$$E=m\cdot\left(a^2+b^2\right)\,.$$